Přírodovědecká fakulta Univerzity Palackého v Olomouci

Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky

Existence řešení Navierových-Stokesových rovnic pro proudění izotermálních stlačitelných tekutin a jeho kvalitativní vlastnosti

Mgr. Rostislav Vodák

Disertační práce k získání vědecké hodnosti Ph.D.

Školitel: Mgr. Ivan Straškraba, CSc.

Olomouc, 2003

Děkuji Mgr. Ivanu Straškrabovi, CSc. za vedení v průběhu celého studia, za cenné rady a připomínky a za všestrannou pomoc, kterou mi při vypracování práce poskytoval.

Contents

1 Základní definice a vlastnosti Orliczových prostorů a Youngových funkcí

Tato kapitola je úvodem do teorie Orliczových prostorů a jsou zde zkoumány ty vlastnosti konkrétních Youngových funkcí, které jsou součástí technického aparátu použitého v následujících kapitolách.

1.1 Youngovy funkce a jejich vlastnosti

Nejdříve zaveďme základní označení, t.j. symbolem $|\cdot|$ rozumíme při aplikaci na množinu Lebesgueovu míru a pro $z \in \mathbb{R}^N$ označme $|z| := \sqrt{\sum_{i=1}^N z_i^2}$. Nechť dále D značí symetrickou část gradientu, t.j. $D_{ij}\mathbf{v} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$.

Definice 1.1 *Řekneme, že funkce Φ je Youngova funkce, jestliže existuje funkce ϕ taková, že*

1. *$\phi(z)$ je neklesající funkce pro $z > 0$,*
2. *$\phi(0) = 0$,*
3. *$\phi(z) > 0$ pro $z > 0$,*
4. *$\phi(\infty) = \infty$,*
5. *ϕ je zprava spojitá*

a

$$\Phi(z) := \int_0^z \phi(y)\ dy.$$

Poznámka 1.2 [15] Z definice Youngovy funkce plyne, že tato funkce je spojitá, rostoucí, konvexní na intervalu $[0, \infty)$ a splňuje následující podmínky

$$\Phi(0) = 0, \qquad \lim_{z\to+\infty} \Phi(z) = +\infty,$$

$$\lim_{z\to 0+} \frac{\Phi(z)}{z} = 0, \quad \lim_{z\to+\infty} \frac{\Phi(z)}{z} = +\infty,$$

$$\Phi(\alpha z) \le \alpha\Phi(z) \text{ pro } 0 \le \alpha < 1,\ z \ge 0,$$

$$\beta\Phi(z) \le \Phi(\beta z) \text{ pro } \beta \ge 1,\ z \ge 0.$$

Poznámka 1.3 Kvůli jednoduchosti značení budeme dále předpokládat, že Youngova funkce je navíc sudá.

Definice 1.4 *Řekneme, že Youngova funkce Ψ je komplementární funkce k Youngově funkci Φ, jestliže*

$$\Psi(x) := \int_0^x \psi(y)\ dy, \text{ kde } \psi(y) = \sup_{\phi(z)\leq y} z \text{ pro } z \geq 0.$$

V případě, že k funkci ϕ existuje inverzní funkce, pak $\psi = \phi^{-1}$.

Nyní si uveďme důležitou vlastnost určité třídy Youngových funkcí.

Definice 1.5 *Youngova funkce Φ splňuje $\triangle_2$-podmínku právě tehdy, když platí*

$$\Phi(2z) \leq k\Phi(z) \text{ pro } z \geq z_0 \geq 0, \tag{1.1}$$

kde konstanta k nezávisí na z. V případě, že $z_0 = 0$, mluvíme o takzvané globální $\triangle_2$-podmínce.

V teorii Orliczových prostorů je poměrně častý případ, že není znám přesný tvar Youngovy funkce Φ. V tomto případě můžeme rozhodnout o tom, zda Youngova funkce Φ splňuje $\triangle_2$-podmínku či nikoli, pomocí průběhu její komplementární funkce.

Tvrzení 1.6 [15, str. 139] *Youngova funkce Φ splňuje $\triangle_2$-podmínku právě tehdy, když existují konstanty $k_0 > 0$ a $z_0 \geq 0$ takové, že*

$$\Psi(z) \leq \frac{1}{2k_0}\Psi(k_0 z) \text{ pro } z \geq z_0, \tag{1.2}$$

kde Ψ je komplementární Youngova funkce k funkci Φ.

Tvrzení 1.7 [13, str. 17] *Nechť Φ je Youngova funkce a nechť splňuje globální Δ_2-podmínku. Pak existují indexy $p > 1$ a $b > 1$ takové, že platí následující nerovnost*

$$\frac{\Phi(z_2)}{z_2^p} \leq \frac{b\Phi(z_1)}{z_1^p} \text{ pro } 0 < z_1 \leq z_2. \tag{1.3}$$

Definice 1.8 *Funkce Φ se nazývá kvazikonvexní, jestliže existuje konvexní funkce ω a konstanta $c > 0$ taková, že*

$$\omega(z) \leq \Phi(z) \leq c\omega(cz) \text{ pro } z \in [0, \infty).$$

Definice 1.9 *Nechť Φ_1 a Φ_2 jsou Youngovy funkce. Jestliže existují konstanty $c > 0$ a $z_0 \geq 0$ takové, že platí*

$$\Phi_1(z) \leq \Phi_2(cz) \ \ \textit{pro } z \geq z_0,$$

pak tuto vlastnost značíme

$$\Phi_1 \prec \Phi_2.$$

Jestliže jsou Youngovy funkce Φ_1 a Φ_2 takové, že

$$\Phi_1 \prec \Phi_2 \ \textit{a zároveň } \Phi_2 \prec \Phi_1,$$

pak řekneme, že funkce Φ_1 a Φ_2 jsou ekvivalentní.

Definice 1.10 *Nechť Φ_1, Φ_2 jsou Youngovy funkce. Jestliže*

$$\lim_{z\to\infty} \frac{\Phi_1(z)}{\Phi_2(\lambda z)} = 0$$

pro každé $\lambda > 0$, pak tento vztah mezi funkcemi Φ_1 a Φ_2 značíme

$$\Phi_1 \prec\prec \Phi_2.$$

1.2 Prostory funkcí

V této kapitole zadefinujeme základní prostory.

Řekneme, že oblast Ω je třídy $C^{\alpha,\beta}$ pro α, $\beta \geq 0$, jestliže lze její hranici popsat funkcemi s výše uvedenou hladkostí. Podrobná definice viz. [15].

Definice Youngovy funkce Φ nám umožňuje vygenerovat odpovídající množiny a prostory funkcí.

Definice 1.11 *Nechť Ω je oblast v $\mathbb{R}^N$ (omezená i neomezená) a Φ je Youngova funkce. Symbolem $\widetilde{L}_\Phi(\Omega)$ označíme množinu takových funkcí v, které splňují nerovnost*

$$\int_\Omega \Phi(v)\ dx < \infty.$$

Symbolem $L_\Phi(\Omega)$ označíme Orliczův prostor funkcí v takových, že

$$\|v\|_\Phi := \sup \int_\Omega vw\ dx < +\infty,$$

kde supremum je bráno přes všechny funkce $w \in \widetilde{L}_\Psi(\Omega)$*, které vyhovují nerovnosti* $\int_\Omega \Psi(w)\ dx \leq 1$*. Prostor* $E_\Phi(\Omega)$ *je definován jakožto uzávěr prostoru* $B(\Omega)$*, což je prostor všech omezených funkcí na oblasti* Ω*, v normě* $\|\cdot\|_\Phi$*. V případě, že bude nutno určit oblast, pro kterou je výše uvedená norma definovaná, pak použijeme označení* $\|\cdot\|_{\Phi,\Omega}$*.*

Definice 1.12 *Nechť* Φ *je Youngova funkce a nechť* u *je měřitelná funkce na* Ω*. Norma definovaná předpisem*

$$|||u|||_\Phi := \inf\left\{\lambda > 0; \int_\Omega \Phi\left(\frac{u(x)}{\lambda}\right)\ dx \leq 1\right\}$$

se nazývá Luxemburgova norma funkce u*.*

Poznámka 1.13 [15, str. 154] Klasická a Luxemburgova norma jsou ekvivalentní normy v příslušném Orliczově prostoru.

Poznámka 1.14 Nelze obecně tvrdit, že prostory $L_\Phi(\Omega)$, $E_\Phi(\Omega)$ a množina $\widetilde{L}_\Phi(\Omega)$ splývají (na rozdíl od Lebesgueových prostorů). V tomto případě hraje důležitou roli tak zvaná $\triangle_2$-podmínka (viz. Definice 1.5).

Tvrzení 1.15 [15, str. 164] *Jestliže funkce* Φ *splňuje* $\triangle_2$*-podmínku, pak*

$$L_\Phi(\Omega) = E_\Phi(\Omega) = \widetilde{L}_\Phi(\Omega).$$

Definice 1.16 *Symbolem* $L^p(\Omega)$ *pro* $p \in [1,\infty)$ *značíme Lebesgueův prostor, což je prostor všech funkcí* v *takových, že*

$$\|v\|_p := \left(\int_\Omega |v|^p\ dx\right)^{1/p} < \infty.$$

$L^\infty(\Omega)$ *je prostor skoro všude omezených funkcí, kde norma je definována předpisem*

$$\|v\|_\infty := \operatorname*{ess\,sup}_\Omega |v|.$$

Symbolem $L^p(\Omega, dist(x,\partial\Omega), -p)$ *označíme prostor všech fukncí* v *takových, že*

$$\|v\|_{p,dist(x,\partial\Omega),-p} := \left(\int_\Omega |v(x)|^p dist(x,\partial\Omega)^{-p}\ dx\right)^{1/p} < \infty,$$

kde $dist(x,\partial\Omega)$ *značí vzdálenost bodu* x *od hranice oblasti* Ω*.*

Poznámka 1.17 Lebesgueovy prostory jsou speciálním případem Orliczových prostorů pro $\Phi(t) = t^p/p$ a $p \in (1, \infty)$.

Definice 1.18 *Sobolevův-Orliczův prostor $W^1 L_\Phi(\Omega)$ definujeme jako prostor všech funkcí v s vlastností, že*

$$\|v\|_{1,\Phi} := \sqrt{\sum_{\alpha, |\alpha| \le 1} \|D^\alpha v\|_\Phi^2} < +\infty,$$

kde symbol D^α značí derivace ve smyslu distribucí. Prostor $W^1 E_\Phi(\Omega)$ je uzávěr prostoru $C^\infty(\overline{\Omega})$ v normě $\|\cdot\|_{1,\Phi}$ a prostor $W_0^1 L_\Phi(\Omega)$ je uzávěrem prostoru $C_0^\infty(\Omega)$ ve stejné normě. Sobolevovy prostory definujeme jako uzávěry v normě $\|\cdot\|_{1,p}$ odpovídajícího prostoru hladkých funkcí takto

$$W^{1,p}(\Omega) := \overline{C^\infty(\overline{\Omega})}^{\|\cdot\|_{1,p}}$$

a

$$W_0^{1,p}(\Omega) := \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{1,p}},$$

kde $\|v\|_{1,p} := \left(\sum_{\alpha,|\alpha|\le 1} \|D^\alpha v\|_p^p\right)^{1/p}$ pro $p \in [1, \infty)$. Pro duální prostory zavedeme označení

$$W^{-1,p}(\Omega) = [W_0^{1,p'}(\Omega)]' \text{ a } W^{-1} L_\Phi(\Omega) = [W_0^1 L_\Psi(\Omega)]'$$

pro $p \in (1, \infty)$, kde p' je Hölderovsky sdružený index, t.j. $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, a Φ je komplementární funkce k Youngově funkci Ψ.

Označme symbolem $\mathcal{D}(\Omega)$ prostor funkcí z $C_0^\infty(\Omega)$ takových, že řekneme, že $\phi_n \to 0$ pro $n \to \infty$ v $\mathcal{D}(\Omega)$, jestliže exituje kompaktní množina $K \subset \Omega$ taková, že *supp* $\phi_n \subset K$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $D^\alpha \phi_n \to 0$ stejnoměrně na Ω pro libovolný multiindex α. Symbolem $\mathcal{D}'(\Omega)$ označme prostor distribucí nad $\mathcal{D}(\Omega)$.

Analogicky můžeme definovat Orliczovy prostory pro vektorové funkce pomocí tzv. G-funkce G, kde

$$\|\mathbf{u}\|_G := \inf\left\{\lambda > 0;\ \int_\Omega G\left(\frac{\mathbf{u}(x)}{\lambda}\right)\ dx \le 1\right\}.$$

G-funkci G můžeme definovat různými způsoby. Pro nás budou směrodatné následující dvě definice:

1. $G_1(z) := \Phi(|z|)$,

2. $G_2(z) := \sum_{i=1}^{m} \Phi(z_i)$,

kde Φ je Youngova funkce.

Definice 1.19 *Označme $D_0^1 L_\Phi(\Omega)$ uzávěr prostoru $C_0^\infty(\Omega)$ v seminormě $|\cdot|_{1,\Phi}$, kde tato seminorma je definována předpisem*

$$|u|_{1,\Phi} := \sqrt{\sum_{|\alpha|=1} |||D^\alpha u|||_\Phi^2}.$$

$H_\Phi^{0,\Phi}(\partial\Omega)$ je uzávěrem množiny omezených funkcí $B(\partial\Omega)$ v normě

$$\|u\|_{H_\Phi^{0,\Phi}} := \|u\|_\Phi + [u]_\Phi ,$$

kde

$$[u]_\Phi := \inf\left\{ z > 0;\ \int_{\partial\Omega}\int_{\partial\Omega} \Phi\left(\frac{1}{z}\frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|}\right) \frac{1}{|x-y|^{N-1}}\ dxdy \leq 1 \right\}.$$

Symbolem $H_{0,\Phi}(\Omega)$ rozumíme uzávěr prostoru $[C_0^\infty(\Omega)]^N$ v normě $\|\cdot\|_{H_\Phi}$, kde

$$\|\mathbf{u}\|_{H_\Phi} := \|\mathbf{u}\|_{G_2} + \|\operatorname{div}\mathbf{u}\|_\Phi.$$

Zde jenom poznamenejme, že v případě, že Youngova funkce Φ splňuje Δ_2-podmínku, budeme značit normu vektorové funkce $\|\mathbf{u}\|_\Phi$, neboť G-funkce G_i jsou ekvivalentní, a v případě, že nesplňuje Δ_2-podmínku, pak používáme definici funkce G_1.

Podívejme se nyní na základní nerovnosti.

Tvrzení 1.20 [15] (Youngova nerovnost) *Nechť funkce $u \in \widetilde{L}_\Phi(\Omega)$ a $v \in \widetilde{L}_\Psi(\Omega)$. Pak*

$$\int_\Omega uv\ dx \leq \int_\Omega \Phi(u)\ dx + \int_\Omega \Psi(v)\ dx.$$

Tvrzení 1.21 [15] (Hölderova nerovnost) *Nechť funkce $u \in L_\Phi(\Omega)$ a $v \in L_\Psi(\Omega)$. Pak*

$$\int_\Omega uv\ dx \leq \|u\|_\Phi \|v\|_\Psi.$$

Tvrzení 1.22 [15] (Jensenova nerovnost) *Nechť Φ je konvexní funkce na reálné ose a nechť $\alpha(x)$ je definovaná a skoro všude kladná na Ω. Pak*

$$\Phi\left(\frac{\int_\Omega u(x)\alpha(x)\ dx}{\int_\Omega \alpha(x)\ dx}\right) \leq \frac{\int_\Omega \Phi(u(x))\alpha(x)\ dx}{\int_\Omega \alpha(x)\ dx}.$$

Lemma 1.23 *Nechť Ω je omezená oblast, Φ je Youngova funkce a nechť $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Pak tato funkce splňuje nerovnosti*

1. $\int_\Omega \Phi(u)\ dx \leq c \int_\Omega G_1(c\nabla u)\ dx$
2. $\int_\Omega \Phi(u)\ dx \leq c \int_\Omega G_2(c\nabla u)\ dx$

pro G-funkce G_i, které jsou zavedeny výše. Odtud pak plyne

$$\|u\|_\Phi \leq c\|\nabla u\|_{G_i}.$$

D ů k a z: Jelikož $\Omega \subset L_{d/2} := \{x;\ 0 \leq |x| \leq d/2\}$, pak

$$|u\,(x)\,| \leq \frac{1}{2}\int_{-d/2}^{d/2} |\nabla u|\ dx_n$$

pro $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Složením s funkcí Φ, použitím Jensenovy nerovnosti a integrací přes Ω dostaneme nerovnost 1. Při důkazu druhé nerovnosti je třeba si uvědomit, že platí následující odhad:

$$|u\,(x)\,| \leq \frac{1}{2}\int_{-d/2}^{d/2} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|\ dx_i \text{ pro každé } i = 1, \ldots, N. \qquad \square$$

Definice 1.24 *Řekneme, že posloupnost $\{v_n\}_{n=1}^\infty$ konverguje E_Ψ-slabě k funkci v v prostoru $L_\Phi(\Omega)$, značíme $v_n \xrightarrow{\Psi} v$, pro $n \to \infty$, jestliže*

$$\int_\Omega v_n w\ dx \to \int_\Omega vw\ dx$$

pro každou funkci w z prostoru $E_\Psi(\Omega)$.

Poznámka 1.25 [12, str. 153] Každý Orliczův prostor $L_\Phi(\Omega)$ je E_Ψ-slabě kompaktní.

Tvrzení 1.26 [15, str. 185] *Nechť Φ_1 a Φ_2 jsou dvě Youngovy funkce. Pak*

$$L_{\Phi_1}(\Omega) \hookrightarrow L_{\Phi_2}(\Omega)$$

právě tehdy, když $\Phi_2 \prec \Phi_1$.

Tvrzení 1.27 [15, str. 189] *Jestliže $\Phi_2 \prec\prec \Phi_1$, pak*

$$L_{\Phi_1}(\Omega) \hookrightarrow E_{\Phi_2}(\Omega).$$

Definice 1.28 *Označme $L^p(0,T;B)$ pro $p \in [1,\infty]$ a $T \in (0,\infty]$ prostor všech zobrazení $v : (0,T) \to B$, kde B je Banachův prostor, která jsou silně měřitelná a pro která je Lebesgueův integrál, který zároveň reprezentuje normu, ve tvaru*

$$\|v\|_{L^p(0,T;B)} := \left(\int_0^T \|v(t)\|_B^p \, dt \right)^{1/p},$$

konečný. Analogickým způsobem lze definovat prostor $L_\Phi(0,T;B)$.

Dále definujme prostor $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^N)$ jako prostor všech distribucí $f \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^N)$ takových, že maximální funkce

$$(M_\phi f)(x) := \sup_{l>0} |(f * \phi_l)(x)|$$

náleží do $L^1(\mathbb{R}^N)$ pro $\phi_l(x) := l^{-N}\phi(x/l)$, kde $\phi \in \mathcal{S}$ s vlastností $\int_{\mathbb{R}^N} \phi \, dx = 1$. Prostor $\mathcal{S}$ je prostor nekonečně diferencovatelných funkcí, které spolu se svými derivacemi rychle klesají k nule pro x jdoucí k nekonečnu. Norma nad tím to prostorem je definována takto $\|f\|_{\mathcal{H}^1} := \int_{\mathbb{R}^N} |(M_\phi f)(x)| \, dx$.

$BMO(\mathbb{R}^N)$ je prostor lokálně integrovatelných funkcí takových, že existuje konstanta $A < \infty$ s vlastností, že

$$\frac{1}{|B|} \int_B |f(x) - f_B| \, dx \leq A$$

pro všechny koule B, kde $f_B := |B|^{-1} \int_B f \, dx$. Nejmenší konstanta A, pro kterou je splněna výše uvedená nerovnost, je pak normou funkce f v prostoru $BMO(\mathbb{R}^N)$.

Definice 1.29 *Řekneme, že posloupnost funkcí $\{v_n\}_{n=1}^\infty$ z $L_{\Phi_1}(0,T;L_{\Phi_2}(\Omega))$ konverguje $*$-slabě k funkci v, jestliže*

$$\int_0^T \phi(t) \int_\Omega v_n(x,t)\psi(x) \, dxdt \to \int_0^T \phi(t) \int_\Omega v(x,t)\psi(x) \, dxdt$$

pro každé $\psi \in E_{\Psi_2}(\Omega)$ a $\phi \in E_{\Psi_1}(0,T)$.

1.3 Vlastnosti Youngových funkcí s exponenciálním růstem a jejich komplementárních funkcí

Nyní se budeme blíže zabývat vlastnostmi těch Youngových funkcí, se kterými budeme pracovat v kapitole týkající se Navierových-Stokesových rovnic.

Definice 1.30 *Definujme Youngovy funkce* $\Phi_\gamma(z) := (1+z)\ln^\gamma(1+z)$ *pro* $\gamma > 1$ *a* $\Phi_1(z) := z\ln(1+z)$. *Funkce* Ψ_γ *a* Ψ_1 *pak budou jejich komplementární funkce. Dále definujme Youngovu funkci* $M(z) := e^z - z - 1$ *a označme* $\overline{M}$ *funkci k ní komplementární. Dále označme* $\Phi_{1/\alpha}(z)$ *Youngovy funkce s růstem* $z\ln^{1/\alpha}(z)$ *pro* $z \geq z_0 > 0$, $\alpha \in (1,\infty)$, *a* $\Psi_{1/\alpha}(z)$ *budou k nim funkce komplementární.*

Definice 1.31 *Definujme prostor* X *takto*

$$X := \{\mathbf{v} : \Omega \to \mathbb{R}^N;\ \mathbf{v}|_{\partial\Omega} = 0,\ D\mathbf{v} \in L_M(\Omega)^{N\times N}\},\ \|\mathbf{v}\|_X := \|D\mathbf{v}\|_{M,\Omega}$$

a prostor Y

$$Y := \{\mathbf{u} : Q_T \to \mathbb{R}^N;\ \mathbf{u}(t)|_{\partial\Omega} = 0,\ D\mathbf{u} \in L_M(Q_T)^{N\times N}\},\ \|\mathbf{u}\|_Y := \|D\mathbf{u}\|_{M,Q_T},$$

kde $Q_T := \Omega \times (0,T)$.

Jelikož nejsme schopni určit přesný tvar komplementárních funkcí Ψ_γ pro $\gamma > 0$ vyšetříme alespoň rychlost jejich růstu pro $z \to \infty$.

Lemma 1.32 *Nechť* Φ_γ *jsou Youngovy funkce zavedené v Definici 1.30 pro* $\gamma > 0$. *Pak jejich komplementární funkce vyhovují následujícím růstovým odhadům*

$$c_2 e^{\left(\frac{|z|}{c}\right)^{1/\gamma}} \leq \Psi_\gamma(z) \leq c_1 e^{2|z|^{1/\gamma}} \tag{1.4}$$

pro $z \geq z_2(\gamma) > 0$, $c(\gamma) > 0$ *a pro* $c_i(\gamma) > 0$.

D ů k a z: Bez újmy na obecnosti provedeme důkaz pro $z \geq 0$ a $\gamma \geq 1$. Z Definice 1.1 dostáváme

$$\phi_\gamma(z) = \Phi'_\gamma(z) = \ln^\gamma(1+z) + \gamma\ln^{\gamma-1}(1+z) \geq \ln^\gamma(1+z) \tag{1.5}$$

pro $z_0(\gamma) \geq 0$, $\gamma > 1$ (případ $\gamma = 1$ lze ověřit analogickým způsobem) a tedy

$$\psi_\gamma(z) \leq e^{z^{1/\gamma}} - 1 \leq \frac{e^{z^{1/\gamma}} z^{1/\gamma}}{\gamma} + e^{z^{1/\gamma}} - 1 \text{ pro } z \geq 0.$$

Odtud po integraci plyne

$$\Psi_\gamma(z) \le ze^{z^{1/\gamma}} - z \le c_1 e^{2z^{1/\gamma}} \text{ pro } z_0(\gamma) \ge 0\,.$$

Stejným postupem odvodíme odhad

$$\phi_\gamma(z) \le c \ln^\gamma(1+z) \text{ pro } z \ge z_1(\gamma)$$

a tedy

$$\Psi_\gamma(z) \ge c_2 e^{\left(\frac{z}{c}\right)^{1/\gamma}} \text{ pro } z \ge z_1(\gamma). \qquad \square$$

Lemma 1.33 *Youngovy funkce Φ_γ pro $\gamma \ge 1$ splňují globální $\triangle_2$-podmínku.*

D ů k a z: Z vlastností logaritmu plyne

$$\Phi_\gamma(2z) = (1+2z)\ln^\gamma(1+2z) \le 2(1+z)\ln^\gamma\left((1+z)^2\right)$$
$$\le 2^{\gamma+1}(1+z)\ln^\gamma(1+z).$$

Analogicky dostaneme

$$\Phi_1(2z) \le 4\Phi_1(z)$$

pro $z \ge 0$. $\square$

Lemma 1.34 *Mezi Youngovými funkcemi Φ_{γ_1} a Φ_{γ_2} platí vztah $\Phi_{\gamma_1} \prec\prec \Phi_{\gamma_2}$ pro $0 < \gamma_1 < \gamma_2$ a tedy pro jejich komplementární funkce dostáváme $\Psi_{\gamma_1} \succ\succ \Psi_{\gamma_2}$.*

D ů k a z: Zřejmě platí, že

$$\lim_{z\to\infty} \frac{\Phi_{\gamma_1}(z)}{\Phi_{\gamma_2}(\lambda z)} = \lim_{z\to\infty} \frac{(1+z)\ln^{\gamma_1}(1+z)}{(1+\lambda z)\ln^{\gamma_2}(1+\lambda z)}$$
$$\le \frac{1}{\lambda}\lim_{z\to\infty} \frac{\ln^{\gamma_1}(1+z)}{(\ln(\lambda)+\ln(1+z))^{\gamma_2}} = 0$$

pro $\lambda \in (0,1]$. $\square$

Lemma 1.35 *Nechť Ω je omezená oblast. Pak*

$$L_{\Psi_1}(\Omega) \hookrightarrow E_{\Psi_\gamma}(\Omega) \tag{1.6}$$

pro $\gamma > 1$.

D ů k a z: Důkaz je zřejmý důsledek Tvrzení 1.27 a Lemma 1.34. $\square$

Tvrzení 1.36 [21] *Nechť* $u \in E_\Phi(\Omega)$. *Pak*

$$\|u * \vartheta_h\|_\Phi \leq \|u\|_\Phi,$$

kde ϑ_h *je jádro regularizátoru, t.j.* $\vartheta \in C_0^\infty(B_1(0))$, $\vartheta \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}^N} \vartheta \, dx = 1$ *a* $\vartheta_h(x) := \frac{1}{h^N}\vartheta\left(\frac{x}{h}\right)$ *pro* $h \in (0,1)$.

Lemma 1.37 *Následující nerovnost*

$$2^m\|v\|_{\Psi_2} \leq c\left(\max\left\{6 \cdot 2^{3m}, \frac{11}{4}\sqrt{2^{7m}}, \frac{2^{4m}}{4}\right\} e^{\frac{2^m+1}{2}} \int_\Omega M(v)\, dx + 1\right)$$

platí pro všechna $m \in \mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \ldots\}$ *a* v *taková, že* $\int_\Omega M(v)\, dx < \infty$.

D ů k a z: Dokažme existenci konstanty $K(c) > 0$ takové, že

$$\Psi(z) := c^3 z^3 e^{\sqrt{cz}} \leq K(c)\left(e^z - z - 1\right) \text{ pro } c \geq 1 \text{ a } z \geq 0\,,$$

kde $z^3 e^{\sqrt{z}}$ je funkce z třídy ekvivalentních Youngových funkcí s růstem $e^{\sqrt{z}}$. Po zderivování funkcí na obou stranách stačí ověřit následující nerovnost

$$3c^3 z^2 e^{\sqrt{cz}} + c^3\frac{\sqrt{c}}{2} z^{\frac{5}{2}} e^{\sqrt{cz}} \leq K(c)\left(e^z - 1\right) \text{ pro } z \geq 0$$

a po dalším derivování dostaneme

$$6c^3 z e^{\sqrt{cz}} + \frac{11}{4}c^3\sqrt{c} z^{\frac{3}{2}} e^{\sqrt{cz}} + \frac{c^4}{4} z^2 e^{\sqrt{cz}} \leq K(c)\, e^z \text{ pro } z \geq 0.$$

Jestliže ověříme poslední nerovnost, pak budou platit i ty předchozí díky tomu, že kromě posledního případu jsou si výrazy na levé a pravé straně rovny pro $z = 0$. Nyní ukážeme, že nerovnost

$$z^2 \leq Ce^{\sqrt{z}}$$

platí pro $z \geq 0$. Tento odhad je zřejmý pro případ $C \geq 1$ a $z \in [0,1]$. Dále budeme derivovat výrazy na obou stranách nerovnice a získáme následující odhady, jejichž ověření povede k důkazu naší nerovnosti. Tedy

$$4z^{\frac{3}{2}} \leq Ce^{\sqrt{z}} \text{ pro } z \geq 1,$$

$$12z \leq Ce^{\sqrt{z}} \text{ pro } z \geq 1,$$
$$24z^{\frac{1}{2}} \leq Ce^{\sqrt{z}} \text{ pro } z \geq 1$$

a

$$24 \leq Ce^{\sqrt{z}} \text{ pro } z \geq 1,$$

což je splněno pro $C := 24$. Odtud vyplývá s použitím Youngovy nerovnosti $ab \leq a^2/2 + b^2/2$, že

$$\begin{aligned}
&6c^3 z e^{\sqrt{cz}} + \frac{11}{4} c^3 \sqrt{c} z^{\frac{3}{2}} e^{\sqrt{cz}} + \frac{c^4}{4} z^2 e^{\sqrt{cz}} \\
&\leq 24 \left(6c^3 e^{\sqrt{cz}+\sqrt{z}} + \frac{11}{4} c^3 \sqrt{c} e^{\sqrt{cz}+\sqrt{z}} + \frac{c^4}{4} e^{\sqrt{cz}+\sqrt{z}} \right) \\
&\leq 24 \left(6c^3 e^{\frac{c}{2}+\frac{z}{2}+\frac{z+1}{2}} + \frac{11}{4} c^3 \sqrt{c} e^{\frac{c}{2}+\frac{z}{2}+\frac{z+1}{2}} + \frac{c^4}{4} e^{\frac{c}{2}+\frac{z}{2}+\frac{z+1}{2}} \right) \leq K(c)\, e^z,
\end{aligned}$$

pro $K(c) := 24 \max \left\{ 6c^3, \frac{11}{4} c^3 \sqrt{c}, \frac{c^4}{4} \right\} e^{\frac{c+1}{2}}$. Z nerovnosti

$$2^m \|v\|_\Psi \leq \int_\Omega \Psi(2^m v)\ dx + 1 \leq K(2^m) \int_\Omega M(v)\ dx + 1$$

pro $\Psi(z) = z^3 e^{\sqrt{z}}$ a z ekvivalence norem generovaných ekvivalentními Youngovými funkcemi vyplývá tvrzení našeho lemma. □

Toto lemma nám mimo jiné říká, že jestliže $\int_\Omega M(v_m)\ dx$ konverguje k nule pro $m \to \infty$, pak i norma $\|v_m\|_{\Psi_2}$ musí konvergovat k nule.

Tvrzení 1.38 [20] (Kornova nerovnost) *Nechť $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ pro každé $p > 1$. Pak platí následující nerovnost*

$$\|v\|_{1,p} \leq \frac{cp^2}{p-1} \|Dv\|_p. \tag{1.7}$$

Lemma 1.39 *Nechť $v \in L_{\Psi_2}(\Omega)$, $w \in L_{\Psi_1}(\Omega)$ a nechť platí následují odhad*

$$\|v\|_p \leq cp\|w\|_p$$

pro každé $p \geq 2$, kde konstanta c je nezávislá na p. Pak

$$\|v\|_{\Psi_2} \leq c\|w\|_M. \tag{1.8}$$

D ů k a z: Definujme funkci Ψ předpisem

$$\Psi(z) := \begin{cases} c_0 z^2 & , \ z \in [0, z_0) \\ e^{\sqrt{z}} - 2z - 4 & , \ z \in [z_0, \infty), \end{cases}$$

kde $c_0 := \frac{1}{z_0^2}\left(e^{\sqrt{z_0}} - 2z_0 - 4\right)$ a z_0 je dostatečně velké. Tedy opět vybereme z množiny všech ekvivalentních Youngových funkcí s růstem $e^{\sqrt{z}}$ jednu funkci. Potom totiž výsledná nerovnost (1.8) platí pro libovolnou funkci z této množiny (viz. [15, str. 187]). Taylorova formule pro funkci $e^{\sqrt{z}}$ nám umožňuje odvodit pro $z \geq z_0$ odhad

$$\sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{q!} z^{q/2} \leq 4 \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p)!} z^p.$$

Tato nerovnost plyne ze skutečnosti, že

- buď $\frac{z^{1/2}}{q+1} \geq 1$
- nebo $\frac{z^{1/2}}{2q} \leq \frac{z^{1/2}}{q+1} < 1$

pro q liché a tedy pro tato q dostáváme

$$\frac{z^{q/2}}{q!} \leq \frac{z^{q/2}}{q!} \frac{z^{1/2}}{q+1} = \frac{z^{(q+1)/2}}{(q+1)!}$$

nebo

$$\frac{z^{q/2}}{q!} = \frac{z^{(q-1)/2}}{(q-1)!} \frac{z^{1/2}}{q} \leq 2 \frac{z^{(q-1)/2}}{(q-1)!}.$$

Odtud

$$\sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{q!} z^{q/2} \leq 4 \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} z^{r/2},$$

kde r jsou sudá čísla.

Vezměme λ takové, že následující integrály existují (viz. [15, str. 150]). Aplikací Lebesgueovy věty dostaneme pro $\Omega' := \left\{x \in \Omega; \left|\frac{v(x)}{\lambda}\right| < z_0\right\}$ odhad

$$\int_{\Omega} \Psi\left(\frac{v}{\lambda}\right) \, dx = \int_{\Omega'} \Psi\left(\frac{v}{\lambda}\right) \, dx + \int_{\Omega \setminus \Omega'} \Psi\left(\frac{v}{\lambda}\right) \, dx = \int_{\Omega'} c_0 \left|\frac{v}{\lambda}\right|^2 \, dx$$

$$+\int_{\Omega\setminus\Omega'}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{1}{q!}\left|\frac{v}{\lambda}\right|^{\frac{q}{2}}-2\left|\frac{v}{\lambda}\right|-4\;dx\le\int_{\Omega'}c_0\left|\frac{v}{\lambda}\right|^2\;dx$$

$$+4\int_{\Omega\setminus\Omega'}\sum_{p=2}^{\infty}\frac{1}{(2p)!}\left|\frac{v}{\lambda}\right|^p\;dx\le c_1\int_{\Omega}\left|\frac{w}{\lambda}\right|^2\;dx$$

$$+4\sum_{p=2}^{\infty}\int_{\Omega}\frac{p^p}{(2p)!}\left|\frac{cw}{\lambda}\right|^p\;dx\le K\int_{\Omega}M\left(\frac{cw}{\lambda}\right)\;dx, \tag{1.9}$$

kde $M(z)=e^z-z-1$ pro $z\ge 0$. Odtud vyplývá užitím definice Luxemburgovy normy nerovnost (1.8). □

Lemma 1.40 *Nechť $v\in W_0^1L_{\Psi_\gamma}(\Omega)$ pro $\gamma\ge 1$. Pak*

$$\sup_{z\in\mathbb{R}^N}\left\|\frac{v(\cdot-z)-v(\cdot)}{|z|}\right\|_{\Psi_\gamma}\le c\|v\|_{1,\Psi_\gamma}. \tag{1.10}$$

D ů k a z: Zřejmě platí nerovnost

$$|v(x-z)-v(x)|=\left|\int_0^1\frac{d}{dr}v(x-rz)\;dr\right|\le\int_0^1|\nabla v(x-rz)\,\|z|\;dr$$

pro funkce $v\in C_0^\infty(\Omega)$. Zbytek důkazu je důsledkem hustoty prostoru $C_0^\infty(\Omega)$ v $W_0^1L_{\Psi_\gamma}(\Omega)$, Jensenovy nerovnosti a definice Luxemburgovy normy. □

Lemma 1.41 *Nechť $v\in L^\infty(0,\infty;W_0^{1,p}(\Omega))$ pro $p>N$ a oblast Ω je třídy C^2. Pak existuje množina funkcí $\psi_h(\cdot,s)\in C_0^\infty(\Omega)$ pro skoro všechna $s\in(0,\infty)$ a pro $h\in(0,1)$ taková, že*

$$\|v-\psi_h\|_{L^\infty(0,\infty;C(\overline{\Omega}))}<\epsilon, \tag{1.11}$$

kde $h=h(\epsilon)\to 0$ pro $\epsilon\to 0$, a navíc

$$\|\psi_h\|_{L^\infty(0,\infty;W_0^{1,p}(\Omega))}\le C, \tag{1.12}$$

kde C nezávisí na h.

D ů k a z: Označme Ω_h oblast takovou, že $\Omega_h\subset\Omega$ a $dist(\partial\Omega,\partial\Omega_h)=h$. Existence takové podoblasti plyne např. z Tvrzení 4.15 na straně 93. Vezměme funkci $\xi_h\in C_0^\infty(\Omega_h)$ s vlastnostmi, že $\xi_h=1$ na Ω_{2h} a $|\nabla\xi_h|\le c/h$.

Dále definujme funkci $\widetilde{u}_h := u\xi_h$. Pak $\widetilde{u}_h$ jsou omezené v $L^\infty(0,\infty;W_0^{1,p}(\Omega))$ nezávisle na h (viz Věta 8.4 v [14, str. 69]) a pro $N < p_1 < p$ platí

$$\|u - \widetilde{u}_h\|_{L^\infty(0,\infty;W_0^{1,p_1}(\Omega))} \leq |\Omega \setminus \Omega_{2h}|^{\frac{p-p_1}{p}} \|u\|_{L^\infty(0,\infty;W_0^{1,p}(\Omega))}.$$

Z věty o vnoření vyplývá, že

$$\|u - \widetilde{u}_h\|_{L^\infty(0,\infty;C(\overline{\Omega}))} \leq c_1(h),$$

kde $c_1(h) \to 0$ pro $h \to 0$.

Definujme nyní funkci $\psi_h := \vartheta_h * \widetilde{u}_h$. Pak zřejmě $\psi_h \in L^\infty(0,T;C_0^\infty(\Omega))$. Nyní ze stejněstejnoměrné spojitosti funkcí $\widetilde{u}_h$ v x-ové proměnné, která je důsledkem vět o vnoření a Arzelà-Ascoliovy věty, vyplývá pro s.v. $s \in (0,\infty)$ a $x \in \Omega$

$$|\psi_h(x,s) - \widetilde{u}_h(x,s)| = \left| \int_{B_1(0)} \vartheta(z) \left(\widetilde{u}_h(x - hz, s) - \widetilde{u}_h(x,s) \right) \, dz \right| \leq c_2(h),$$

kde $c_2(h) \to 0$ pro $h \to 0$. □

Definice 1.42 *Definujme seřezávací funkci $T \in C^\infty(\mathbb{R}_0^+)$ takto*

$$T(z) = z, \; z \in [0,1], \; T(z) \leq z, \; z \in [1,3], \; T(z) = 2, \; z \geq 3.$$

Dále označme

$$T_k(z) = kT\left(\frac{z}{k}\right), \; k = 1, 2, \ldots .$$

Lemma 1.43 *Nechť funkce w náleží do prostoru $L^\infty(0,\infty;L_{\Phi_1}(\Omega))$ a nechť je nezáporná v oblasti $\Omega \times [0,\infty)$. Dále předpokládejme, že splňuje nerovnost $0 < \|w\|_{L^\infty(0,\infty;L_{\Phi_1}(\Omega))} \leq K$. Pak*

$$\|w - T_k(w)\|_{L^\infty(0,\infty;L^1(\Omega))} \leq \frac{cK^2}{\ln k}, \; k = 2, 3, \ldots . \tag{1.13}$$

D ů k a z: Definice funkcí T_k nám umožňuje rozepsat odhadovaný integrál takto

$$\int_\Omega |w(t) - T_k(w(t))| \, dx = \int_{\Omega_k^1(t)} |w(t) - T_k(w(t))| \, dx$$
$$+ \int_{\Omega_k^2(t)} |w(t) - T_k(w(t))| \, dx + \int_{\Omega_k^3(t)} |w(t) - T_k(w(t))| \, dx,$$

kde $\Omega_k^1(t) := \{x;\ w(x,t) \le k\}$, $\Omega_k^2(t) := \{x;\ k \le w(x,t) \le 3k\}$ a $\Omega_k^3(t) := \{x;\ w(x,t) \ge 3k\}$. Z definice funkce T_k plynou následující odhady:

$$\int_{\Omega_k^1(t)} |w(t) - T_k(w(t))|\ dx = 0,$$

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_k^3(t)} |w(t) - T_k(w(t))|\ dx &= \frac{\int_{\Omega_k^3(t)} \ln(w(t))\ dx}{\int_{\Omega_k^3(t)} \ln(w(t))\ dx} \int_{\Omega_k^3(t)} |w(t) - T_k(w(t))|\ dx \\
&\le \frac{c}{|\Omega_k^3(t)| \ln(3k)} \int_{\Omega_k^3(t)} \ln(w(t))\ dx \int_{\Omega_k^3(t)} w(t)\ dx \\
&\le \frac{cK^2}{|\Omega_k^3(t)| \ln(3k)} \|\chi_{\Omega_k^3(t)}\|_{\Psi_1} \|\chi_{\Omega_k^3(t)}\|_{\Phi_1}.
\end{aligned}$$

Poslední nerovnost plyne z Hölderovy a Youngovy nerovnosti (viz. Tvrzení 1.20 a 1.21) a z omezenosti $0 < \|w\|_{L^\infty(0,\infty;L_{\Phi_1}(\Omega))} \le K$. Jestliže vezmeme v potaz následující reprezentaci normy charakteristické funkce (viz [15, str. 149])

$$\|\chi_{\Omega_k^3(t)}\|_{\Phi} = |\Omega_k^3(t)| \Phi^{-1}\left(\frac{1}{|\Omega_k^3(t)|}\right),$$

pak zbývá dokázat

$$\lim_{z\to 0+} z\Phi_1^{-1}\left(\frac{1}{z}\right)\Psi_1^{-1}\left(\frac{1}{z}\right) \le c \text{ pro nějaké } c > 1.$$

Důkaz této nerovnosti je ekvivalentní důkazu nerovnosti

$$1 \le \lim_{z\to 0+} z\Phi_1\left(\frac{c}{z\Psi^{-1}\left(\frac{1}{z}\right)}\right),$$

kde $\Psi(z) := e^z - 1$ a tedy funkce Ψ je ekvivalentní s Youngovou funkcí Ψ_1 ve smyslu nerovností

$$\Psi_1(z) \le \Psi(z) \le 2\Psi_1(z) \ \text{ pro } z \ge z_0.$$

Pak snadno spočítáme limitu

$$\lim_{z\to 0+} \frac{c}{\ln\left(1+\frac{1}{z}\right)} \ln\left(1 + \frac{c}{z\ln\left(1+\frac{1}{z}\right)}\right) = \lim_{z\to 0+} \frac{\left(c\ln\left(1+\frac{c}{z\ln\left(1+\frac{1}{z}\right)}\right)\right)'}{\left(\ln\left(1+\frac{1}{z}\right)\right)'}$$

$$= \lim_{z\to 0+} \frac{c^2\left((z+1)\ln\left(1+\frac{1}{z}\right)-1\right)}{\left(z\ln\left(1+\frac{1}{z}\right)+c\right)\ln\left(1+\frac{1}{z}\right)} > 1 \text{ pro } c > 1.$$

V případě integrálu přes $\Omega_k^2(t)$ postupujeme obdobně. $\square$

Lemma 1.44 *Nechť $v_n \overset{\Psi_1}{\rightharpoonup} v$. Pak $v_n \to v$ v prostoru $W^{-1,p'}(\Omega)$ pro $p > N$.*

D ů k a z: Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme, že $\forall n_0 \in \mathbb{N}_0\ \exists n \geq n_0$ a $w_n \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $p > N$, takové, že $\|w_n\|_{1,p} \leq 1$ a že platí nerovnost

$$\int_\Omega (v_n - v)w_n\, dx + \epsilon \geq \|v_n - v\|_{-1,p'} \geq \delta > 0$$

pro δ nezávislé na n a pro libovolné ale pevné $\epsilon > 0$. Kompaktní vnoření $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow E_{\Psi_1}(\Omega)$ nám umožňuje vybrat podposloupnost $\{w_{n_k}\}_{n_k=1}^\infty \subset \{w_n\}_{n=1}^\infty$ takovou, že $w_{n_k} \to w$ v prostoru $E_{\Psi_1}(\Omega)$ pro $n_k \to \infty$. Z této skutečnosti vyplývá, že

$$\delta \leq \|v_{n_k} - v\|_{-1,p'} \leq \int_\Omega (v_{n_k} - v)\, w_{n_k}\, dx + \epsilon$$

$$\leq \|w_{n_k} - w\|_{\Psi_1}\|v_{n_k} - v\|_{\Phi_1} + \left|\int_\Omega (v_{n_k} - v)\, w\, dx\right| + \epsilon \to \epsilon \text{ pro } n_k \to \infty\,,$$

což je spor. $\square$

Lemma 1.45 *Nechť $\{v_m\}_{m=0}^\infty \subset L^\infty(\Omega)$ je posloupnost vyhovující následujícím nerovnostem*

$$\|v_m\|_\infty \leq c \ \ a \ \ \|v_m\|_2 \leq \frac{1}{\sqrt{M\left(\max\{1,c\}\, 2^m\right)}},\ \ m \in \mathbb{N}_0,$$

kde $M(z) = e^z - z - 1$, pro $z \geq 0$, je sudá funkce na $\mathbb{R}$. Pak

$$\|v_m\|_M \leq \frac{K}{2^m} \text{ pro } m \in \mathbb{N}_0. \tag{1.14}$$

D ů k a z: Zřejmě platí následující odhad

$$\|2^m v_m\|_p^p \leq (2^m)^p\, \|v_m\|_2^2 \|v_m\|_\infty^{p-2} \leq (2^m \max\{1,c\})^p\, \|v_m\|_2^2,\ \ p \geq 2.$$

Z Taylorova rozvoje funkce M získáme nerovnost

$$\int_\Omega M\left(2^m v_m\right)\, dx \leq \|v_m\|_2^2 M\left(2^m \max\{1,c\}\right).$$

Zbytek důkazu dostaneme z následující nerovnosti

$$2^m \|v_m\|_M \leq \int_\Omega M\left(2^m v_m\right)\, dx + 1. \qquad \square$$

Lemma 1.46 *Nechť* $\{u_n\}_{n=1}^\infty \in L_\Psi(\Omega)$ *je taková posloupnost, že* $u_n \xrightharpoonup{\Phi} u$. *Nechť* Φ *splňuje* $\triangle_2$*-podmínku. Pak*

$$\lim_{n\to\infty} \inf \|u_n\|_\Psi \geq \|u\|_\Psi.$$

D ů k a z: Jelikož Φ splňuje $\triangle_2$-podmínku a tedy $E_\Phi(\Omega) = L_\Phi(\Omega) = \widetilde{L}_\Phi(\Omega)$, pak pro každé $\epsilon \in (0,1)$ existuje funkce $v_\epsilon \in E_\Phi(\Omega)$ taková, že $\int_\Omega \Phi(v_\epsilon)\, dx \leq 1$ a platí nerovnost

$$\|u\|_\Psi \leq \int_\Omega u v_\epsilon\, dx + \epsilon = \lim_{n\to\infty} \inf \int_\Omega u_n v_\epsilon\, dx + \epsilon \leq \lim_{n\to\infty} \inf \|u_n\|_\Psi + \epsilon. \qquad \square$$

Lemma 1.47 *Nechť funkce* $v \in \widetilde{L}_M(Q_T)$, *kde* $Q_T := \Omega \times (0,T)$. *Pak* $v \in L_M(0,T;L_M(\Omega))$. *Nechť dále* $w \in \widetilde{L}_{\Phi_1}(Q_T)$. *Pak* $w \in L_{\Phi_{1/\alpha}}(0,T;L_{\Phi_{1/\beta}}(\Omega))$ *pro* α, $\beta \in (1,\infty)$ *splňující rovnost* $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$.

D ů k a z: Platnost prvního tvrzení plyne z definice normy na Orliczových prostorech, Youngovy nerovnosti a z odhadu (pro ψ s vlastností, že $\int_\Omega \Phi_1(\psi(x))\, dx \leq 1$)

$$\left|\int_0^T \varphi(t) \sup_\psi \int_\Omega v(x,t)\psi(x)\, dxdt\right| \leq \int_0^T \int_\Omega M(v)\, dxdt$$

$$+ \int_0^T \sup_\psi \int_\Omega |\varphi(t)\psi(x)| \ln\left(1 + |\varphi(t)||\psi(x)|\right) dxdt + c$$

$$\leq c\left(\int_0^T \sup_\psi \int_\Omega |\varphi(t)\psi(x)| \ln\left((1+|\varphi(t)|)(1+|\psi(x)|)\right) dxdt + 1\right)$$

$$\leq c\bigg(\int_0^T \sup_\psi \int_\Omega |\varphi(t)\psi(x)| \ln\left(1 + |\varphi(t)|\right) dxdt$$

$$+ \int_0^T \sup_\psi \int_\Omega |\varphi(t)\psi(x)| \ln\left(1 + |\psi(x)|\right) dxdt + 1\bigg) < +\infty$$

za předpokladu, že
$$\int_0^T \Phi_1(\varphi(t))\ dt \leq 1.$$
Pro důkaz druhé části tvrzení stačí užít Youngovu nerovnost, Jensenovu nerovnost a odhad

$$\Phi_{1/\alpha}(\Phi_{1/\beta}(z)) = z\ln^{1/\beta}(z)\ln^{1/\alpha}(z\ln^{1/\beta}(z)) \leq 2z\ln(1+z) + c$$

pro $z \geq z_0 \geq 1$. $\square$

2 Singulární integrály v Orliczových prostorech

Tuto kapitolu budeme věnovat studiu singulárních integrálů, jejichž jádro splňuje Calderónovy-Zygmundovy podmínky, nad Orliczovými prostory. Jedná se o zobecnění dosavadní teorie, která byla zavedena pro singulární integrály nad Lebesgueovými prostory (viz. [28] a [29]).

2.1 Calderónovy-Zygmundovy podmínky

Definujme singulární jádro K takto

$$K(x,z) := \frac{k(x,z)}{|z|^N}$$

pro $x \in \Omega$ a $z \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$. Řekneme, že funkce $k(x,z)$ splňuje Calderónovy-Zygmundovy podmínky, jestliže

1. pro libovolné $x \in \Omega$, $z \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ a každé $\alpha > 0$ platí

$$k(x,z) = k(x, \alpha z),$$

2. pro každé $x \in \Omega$ je funkce $k(x,z)$ integrovatelná na jednotkové sféře a splňuje podmínku

$$\int_{|z|=1} k(x,z)\ d_z S = 0,$$

3. pro nějaké $q > 1$ existuje konstanta $C > 0$ taková, že

$$\int_{|z|=1} |k(x,z)|^q\ d_z S \leq C \text{ stejnoměrně vzhledem k } x,$$

4. V kapitole 4 budeme místo podmínky 3. předpokládat, že

$$|k(x,z)| \leq B$$

pro nějakou konstantu B a pro každé $x \in \Omega$ a $z \in \mathbb{R}^N$.

Označme

$$\lambda_{\alpha,f} := |\Omega_{\alpha,f}|,\ \text{kde}\ \Omega_{\alpha,f} := \{x \in \mathbb{R}^N;\ |f(x)| > \alpha\}.$$

Dále definujme

$$K_\epsilon(x,z) := \begin{cases} K(x,z) & \text{pro } |z| \geq \epsilon, \\ 0 & \text{pro } |z| < \epsilon \end{cases}$$

a

$$T_\epsilon f(x) := \int_{\mathbb{R}^N} K_\epsilon(x, x-y) f(y)\ dy.$$

Potom singulární integrál zadefinujeme takto:

$$Tf(x) = \lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^N} K_\epsilon(x, x-y) f(y)\ dy.$$

Definice 2.1 *Operátor T nazveme operátorem slabého typu (p,q), jestliže*

$$\lambda(\alpha, Tf) \leq \left(\frac{c||f||_p}{\alpha} \right)^q$$

pro $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, kde $p, q \in [1, \infty)$, $\alpha > 0$ a pro konstantu c nezávislou na f. Operátor T nazveme operátorem slabého typu (Φ, Φ) za předpokladu, že splňuje nerovnost

$$\Phi(\alpha)\lambda(\alpha, Tf) \leq c \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(f(x))\ dx$$

pro $f \in \widetilde{L}_\Phi(\mathbb{R}^N)$, $\alpha > 0$ a pro konstantu c nezávislou na f.

2.2 Singulární integrály na Orliczových prostorech a základní odhady

Lemma 2.2 *Nechť Φ je Youngova funkce splňující globální Δ_2-podmínku. Pak existuje konstanta $c > 0$ nezávislá na ϵ taková, že*

$$\Phi(\alpha)\lambda(\alpha, T_\epsilon f) \leq c \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(f(x))\ dx$$

pro $f \in L_\Phi(\mathbb{R}^N)$ a pro každé $\alpha \in [0, \infty)$.

D ů k a z: Snadno ověříme platnost odhadu

$$\Phi(\alpha)\lambda(\alpha, T_\epsilon f) \leq \Phi(\alpha)\lambda\left(\frac{\alpha}{2}, T_\epsilon f_\alpha\right) + \Phi(\alpha)\lambda\left(\frac{\alpha}{2}, T_\epsilon f^\alpha\right),$$

kde

$$f_\alpha(x) := \begin{cases} f(x) & , \text{ jestliže } |f(x)| \le \alpha, \\ 0 & , \text{ jestliže } |f(x)| > \alpha \end{cases}$$

a

$$f^\alpha(x) := \begin{cases} f(x) & , \text{ jestliže } |f(x)| > \alpha, \\ 0 & , \text{ jestliže } |f(x)| \le \alpha. \end{cases}$$

Poněvadž Φ je konvexní funkce, platí nerovnost

$$\frac{\Phi(x_1)}{x_1} \le \frac{a\Phi(ax_2)}{x_2}$$

pro $a > 1$ a pro $0 < x_1 \le x_2$. Ze skutečnosti, že $T_\epsilon f$ je operátorem slabého typu (p,p) pro $p \in [1,\infty)$ (viz. [28, str. 19, 20]), pak vyplývá s použitím výše uvedené nerovnosti, že

$$\Phi(\alpha)\lambda\left(\frac{\alpha}{2}, T_\epsilon f^\alpha\right) \le \frac{c\Phi(\alpha)}{\alpha}\int_{\mathbb{R}^N} |f^\alpha(x)|\ dx \le c_1 \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(f(x))\ dx$$

a z Tvrzení 1.7 dostáváme

$$\Phi(\alpha)\lambda\left(\frac{\alpha}{2}, T_\epsilon f_\alpha\right) \le \frac{c\Phi(\alpha)}{\alpha^p}\int_{\mathbb{R}^N} |f_\alpha(x)|^p\ dx \le c\int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|^p \frac{\Phi(f(x))}{|f(x)|^p}\ dx. \quad \square$$

Věta 2.3 *Nechť Φ je Youngova funkce splňující globální Δ_2-podmínku a nechť Φ^γ je kvazikonvexní funkce (viz. Definice 1.8) pro $\gamma \in (0,1)$. Pak*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Phi(T_\epsilon f(x))\ dx \le c\int_{\mathbb{R}^N} \Phi(f(x))\ dx \tag{2.1}$$

pro každé $\epsilon \in (0,1)$ a konstantu c nezávislou na ϵ. Limita $\lim_{\epsilon\to 0} T_\epsilon f = Tf$ existuje ve smyslu konvergence v prostoru $L_\Phi(\mathbb{R}^N)$ a platí odhady

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Phi(Tf(x))\ dx \le c\int_{\mathbb{R}^N} \Phi(f(x))\ dx \tag{2.2}$$

a

$$\|Tf\|_\Phi \le c\|f\|_\Phi. \tag{2.3}$$

D ů k a z: Důkaz této věty je opět založen na skutečnosti, že operátor T_ϵ je operátorem slabého typu (p,p). Zřejmě platí odhad

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Phi(T_\epsilon f(x))\ dx = \int_0^\infty \lambda(\alpha, T_\epsilon f)\ d\Phi(\alpha) \le \int_0^\infty \lambda\left(\frac{\alpha}{2}, T_\epsilon f^\alpha\right)\ d\Phi(\alpha)$$

$$+\int_0^\infty \lambda\left(\frac{\alpha}{2}, T_\epsilon f_\alpha\right)\, d\Phi(\alpha) =: I_1 + I_2.$$

Kvazikonvexita funkce Φ^γ pro nějaké $\gamma \in (0,1)$ je ekvivalentní s nerovností

$$\int_0^t \frac{d\Phi(u)}{u} \leq \frac{c\Phi(ct)}{t} \text{ pro } t > 0 \text{ a } c > 0,$$

(viz. [13, str. 6]), což nám umožňuje spolu se skutečností, že T_ϵ je operátor slabého typu $(1,1)$, odhadnout integrál I_1 takto

$$I_1 \leq \int_0^\infty \frac{c}{\alpha}\left(\int_{|f(x)|>\alpha} |f(x)|\, dx\right)\, d\Phi(\alpha)$$

$$= c\int_{\mathbb{R}^N} |f(x)| \left(\int_0^{|f(x)|} \frac{d\Phi(\alpha)}{\alpha}\right)\, dx \leq c_1 \int_{\mathbb{R}^N} |f(x)| \frac{\Phi(f(x))}{|f(x)|}\, dx.$$

Pro $p_1 > p$, kde p je index z nerovnosti (1.3), lze dokázat, že $\lim_{t\to\infty} \frac{\Phi(t)}{t^{p_1}} = 0$ a tedy

$$\int_t^\infty \frac{d\Phi(u)}{u^{p_1}} = \frac{\Phi(u)}{u^{p_1}}\bigg|_t^\infty + p_1 \int_t^\infty \frac{\Phi(u)}{u^{p_1+1}}\, du.$$

Odtud a z (1.3) pak plyne

$$\int_t^\infty \frac{d\Phi(u)}{u^{p_1}} \leq \frac{c\Phi(t)}{t^{p_1}}.$$

Užitím výše uvedené nerovnosti dostáváme

$$I_2 \leq c\int_0^\infty \frac{1}{\alpha^{p_1}}\left(\int_{|f(x)|<\alpha} |f(x)|^{p_1}\, dx\right) d\Phi(\alpha)$$

$$= c\int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|^{p_1} \left(\int_{|f(x)|}^\infty \frac{d\Phi(\alpha)}{\alpha^{p_1}}\right)\, dx \leq c\int_{\mathbb{R}^N} \Phi(f(x))\, dx.$$

Odtud pak z definice Luxemburgovy normy plyne, že

$$\|T_\epsilon f\|_\Phi \leq c\|f\|_\Phi$$

pro $\epsilon > 0$ a c nezávislé na ϵ. Jelikož $f \in L_\Phi(\mathbb{R}^N)$ a Youngova funkce Φ splňuje Δ_2-podmínku, pak lze funkci f rozložit jako součet dvou funkcí, t.j.

$f = f_1 + f_2$, kde $f_1 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ a f_2 je libovolně malá v normě $\|\cdot\|_\Phi$. Následující odhad

$$\|T_{\frac{1}{n}} f - T_{\frac{1}{m}} f\|_\Phi \leq c\|\nabla f_1\|_{C(\mathbb{R}^N)} \delta\left(\frac{1}{n}\right) + c\|f_2\|_\Phi,$$

kde $\delta\left(\frac{1}{n}\right) \to 0$ pro $n \to +\infty$, snadno odvodíme ze skutečnosti, že

$$\int_{r_1<|x-y|<r_2} \frac{k(x, x-y)}{|x-y|^N}\, dy = 0,$$

což plyne z Calderónových-Zygmundových podmínek 1. a 2., a z nerovnosti

$$\left|\int_{r_1<|x-y|<r_2} \frac{k(x, x-y)}{|x-y|^N}(f_1(y) - f_1(x))\, dy\right|$$
$$\leq c\|\nabla f_1\|_{C(\mathbb{R}^N)} \int_{r_1<|x-y|<r_2} \frac{|k(x, x-y)|}{|x-y|^{N-1}}\, dy.$$

Odtud pak vyplývá cauchyovskost posloupnosti $\{T_{\frac{1}{n}} f\}_{n=1}^\infty$. To znamená, že pro každé $f \in L_\Phi(\mathbb{R}^N)$ dostaneme cauchyovskou a tedy konvergentní posloupnost funkcí $T_{\frac{1}{n}} f$ v prostoru $L_\Phi(\mathbb{R}^N)$. Silná konvergence aplikovaná na odhad (2.1) spolu s definicí Luxemburgovy normy vedou k nerovnostem

$$\int_\Omega \Phi(Tf)\, dx \leq c \int_\Omega \Phi(f)\, dx \tag{2.4}$$

a

$$\|Tf\|_\Phi \leq c\|f\|_\Phi \tag{2.5}$$

pro $f \in L_\Phi(\mathbb{R}^N)$. $\square$

Věta 2.4 *Definujme operátor $\overline{T} f(x)$ takto*

$$\overline{T} f(x) := \int_{\mathbb{R}^N} \widetilde{K}(x-y) f(y)\, dy,$$

kde $\widetilde{K} \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Pak platí

$$\|\overline{T} f\|_\Phi \leq c\|f\|_\Phi \tag{2.6}$$

a

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Phi(\overline{T} f)\, dx \leq c \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(f)\, dx \tag{2.7}$$

pro $f \in L_\Phi(\mathbb{R}^N)$, kde Φ je Youngova funkce splňující globální Δ_2-podmínku a zároveň funkce Φ^γ je kvazikonvexní pro nějaké $\gamma \in (0, 1)$.

D ů k a z: Z Youngovy věty pro konvoluce (viz. [9, str. 85]) vyplývá, že

$$\|\overline{T}f\|_p \leq c\|f\|_p \text{ pro } f \in L^p(\mathbb{R}^N),\ p \in [1,\infty].$$

$\overline{T}$ je tedy operátor typu (p,p) pro libovolné $p \in [1,\infty]$ a současně je operátorem slabého typu (p,p). Zbytek důkazu je stejný jako u Věty 2.3. $\square$

3 Úloha $\operatorname{div} \mathbf{v} = f$ nad Orliczovými prostory

V této kapitole budeme studovat existenci řešení úlohy

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = f$$

nad Orliczovými prostory a to v závislosti na okrajové podmínce, tvaru funkce f a omezenosti či neomezenosti oblasti Ω.

3.1 Úloha $\operatorname{div} \mathbf{v} = f$ nad Orliczovými prostory s nulovou a nenulovou okrajovou podmínkou

Naši úlohu zformulujeme takto:

Nechť Ω je omezená oblast v $\mathbb{R}^N$ pro $N \geq 2$. Pro zadanou funkci $f \in L_\Phi(\Omega)$ s vlastností

$$\int_\Omega f \, dx = 0 \tag{3.1}$$

hledáme vektor $\mathbf{v} : \Omega \to \mathbb{R}^N$ takový, že

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = f, \tag{3.2}$$

$$\mathbf{v} \in W_0^1 L_\Phi(\Omega)^N, \tag{3.3}$$

$$\|\mathbf{v}\|_{1,\Phi} \leq c\|f\|_\Phi. \tag{3.4}$$

Věta 3.1 *Nechť Ω je omezená oblast s Lipschitzovskou hranicí. Nechť Φ je Youngova funkce splňující globální Δ_2-podmínku a nechť funkce Φ^γ je kvazikonvexní pro nějaké $\gamma \in (0, 1)$. Pak pro libovolnou funkci f, $f \in L_\Phi(\Omega)$, která splňuje podmínku kompatibility* (3.1)*, má úloha* (3.2)–(3.4) *alespoň jedno řešení $\mathbf{v} \in W_0^1 L_\Phi(\Omega)^N$. Jestliže $f \in C_0^\infty(\Omega)$, pak $\mathbf{v} \in C_0^\infty(\Omega)^N$.*

D ů k a z: Nechť $f \in C_0^\infty(\Omega)$. Oblast Ω rozložíme na podoblasti Ω_i takové, že $\Omega = \cup_{i=1}^{m+\nu} \Omega_i$, kde Ω_i jsou hvězdicovité oblasti ve vztahu ke kouli B_i (to znamená, že pro každý bod $y \in \Omega_i$ existuje bod $x \in B_i$ takový, že úsečka $\overline{xy} \subset \Omega_i$). Navíc $\partial\Omega \subset \cup_{i=1}^m \Omega_i$. Tento rozklad nám umožňuje rozložit funkci f takto $f = \sum_{i=1}^{m+\nu} f_i$, kde $f_i \in C_0^\infty(\Omega_i)$ a $\int_{\Omega_i} f_i \, dx = 0$ (podrobné odvození viz. [9, str. 127]). Stačí tedy zkoumat řešitelnost naší úlohy pro oblast Ω, kde Ω je hvězdicovitá oblast ve vztahu k otevřené kouli $B_r(x_0)$. Potom řešení úlohy (3.2)–(3.4) lze získat jako součet funkcí $\mathbf{v}_i$, $i = 1, \ldots, m+\nu$, kde funkce $\mathbf{v}_i$ jsou řešení úlohy (3.2)–(3.4) pro $f = f_i$ v oblasti Ω_i. Předpokládejme tedy, že Ω je hvězdicovitá oblast ve vztahu k otevřené kouli $B_r(x_0)$, $f \in C_0^\infty(\Omega)$ a $\int_\Omega f\ dx = 0$.

V [9, str. 117] byla odvozena jedna větev řešení úlohy (3.1)–(3.4) reprezentovaná slabě singulárním integrálem ve tvaru

$$\mathbf{v}(x) = \int_{\Omega'} \widetilde{f}(y) \left[\frac{x-y}{|x-y|^N} \int_{|x-y|}^{\infty} \omega \left(y + \xi \frac{x-y}{|x-y|} \right) \xi^{N-1}\ d\xi \right]\ dy,$$

kde $\widetilde{f} \in C_0^\infty(\Omega')$ a symboly $\widetilde{f}$ a Ω' značí funkci f a oblast Ω po transformaci souřadnic

$$x \to x' = \frac{x - x_0}{r}.$$

Funkce $\omega \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ má tyto vlastnosti

- $supp(\omega) \subset B_1(0)$
- $\int_{B_1(0)} \omega\ dx = 1$.

Vztah pro derivaci funkce $\mathbf{v}$ odvodíme stejným způsobem jako v [9, str. 119], t.j.

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial}{\partial x_j} v_i(x) &= \int_\Omega K_{ij}(x, x-y) f(y)\ dy + \int_\Omega G_{ij}(x,y) f(y)\ dy \\ &\quad + f(x) \int_\Omega \frac{(x_j - y_j)(x_i - y_i)}{|x-y|^2} \omega(y)\ dy,\ i,j = 1, \ldots, N, \end{aligned}$$

kde $|G_{ij}(x,y)| \leq \frac{c}{|x-y|^{N-1}}$, $x, y \in \Omega$, a $K_{ij}(x, x-y) = \frac{k_{ij}(x,x-y)}{|x-y|^N}$. Funkce $k_{ij}(x,z)$ navíc splňuje Calderónovy-Zygmundovy podmínky. Z globální Δ_2-podmínky, Věty 2.3 a 2.4 a z Lemma 1.23 pak po přechodu k původním souřadnicím $x' \to x$ plyne odhad

$$\int_\Omega G_2(\mathbf{v})\ dx + \int_\Omega \widetilde{G}_2(\nabla \mathbf{v})\ dx \leq c \int_\Omega \Phi(f)\ dx,$$

kde $G_2(z) = \sum_{i=1}^N \Phi(z_i)$, $z = (z_1, \ldots, z_N)$, a $\widetilde{G}_2(z) = \sum_{i,j=1}^N \Phi(z_{ij})$, $z = [z_{ij}]_{i,j=1}^N$. Z Luxemburgovy definice normy snadno odvodíme

$$\|\mathbf{v}\|_{1,\Phi} \leq c \|f\|_\Phi.$$

Jelikož Youngova funkce Φ splňuje globální Δ_2-podmínku, můžeme pro každou funkci f, $f \in L_\Phi(\Omega)$, zkonstruovat posloupnost funkcí $\{f_m\}_{m=1}^\infty$ takovou, že

$f_m \in C_0^\infty(\Omega)$, $\int_\Omega f_m dx = 0$ a $f_m \to f$ v prostoru $L_\Phi(\Omega)$. Označme $\mathbf{v}_m$ řešení úlohy (3.1)–(3.4) pro $f = f_m$. Pak z linearity slabě singulárních a singulárních integrálů reprezentujících řešení plyne, že posloupnost $\{\mathbf{v}_m\}_{m=1}^\infty$ konverguje silně k funkci $\mathbf{v}$ v prostoru $W^1L_\Phi(\Omega)^N$. Odtud

$$\|\mathbf{v}\|_{1,\Phi} \leq c\|f\|_\Phi. \qquad \square$$

Nyní se zaměříme na případ s nenulovou okrajovou podmínkou. Formulace úlohy vypadá v tomto případě takto:

Nechť Ω je omezená oblast v $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, a nechť jsou dány funkce $\mathbf{a} \in H_\Phi^{0,\Phi}(\partial\Omega)^N$ a $f \in L_\Phi(\Omega)$ takové, že

$$\int_\Omega f \; dx = \int_{\partial\Omega} \mathbf{a}\cdot\mathbf{n} \; dS. \tag{3.5}$$

Hledáme vektor $\mathbf{v} : \Omega \to \mathbb{R}^N$ takový, že

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = f, \tag{3.6}$$

$$\mathbf{v} \in W^1L_\Phi(\Omega)^N, \;\; \mathbf{v}|_{\partial\Omega} = \mathbf{a}, \tag{3.7}$$

$$\|\mathbf{v}\|_{1,\Phi} \leq c(\|f\|_\Phi + \|\mathbf{a}\|_{H_\Phi^{0,\Phi}}). \tag{3.8}$$

Věta 3.2 *Nechť Ω je omezená oblast s Lipschitzovskou hranicí. Dále předpokládejme, že Φ je Youngova funkce splňující globální Δ_2-podmínku a funkce Φ^γ je kvazikonvexní pro nějaké $\gamma \in (0,1)$. Pak pro libovolnou funkci $f \in L_\Phi(\Omega)$, která splňuje podmínku kompatibility* (3.5)*, má úloha* (3.6)–(3.8) *alespoň jedno řešení $\mathbf{v} \in W^1L_\Phi(\Omega)^N$.*

D ů k a z: Nechť $\mathbf{a} \in H_\Phi^{0,\Phi}(\partial\Omega)^N$. Jelikož existuje spojitý lineární operátor z prostoru $H_\Phi^{0,\Phi}(\partial\Omega)^N$ na $W^1L_\Phi(\Omega)^N$ (viz. [16]), pak v prostoru $W^1L_\Phi(\Omega)^N$ nalezneme funkci $\mathbf{U}$ takovou, že $\mathbf{U}|_{\partial\Omega} = \mathbf{a}$ ve smyslu stop. Řešení problému pak hledáme ve tvaru

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{U}.$$

Z Věty 3.1 plyne existence funkce $\mathbf{u}$, která splňuje rovnici

$$\operatorname{div}\mathbf{u} = f - \operatorname{div}\mathbf{U} = F,$$

$$\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = 0,$$

a tato funkce vyhovuje odhadu

$$\|\mathbf{u}\|_{1,\Phi} \leq c\|F\|_\Phi.$$

Odtud a z inverzní věty o stopách (viz. [16]) pak dostáváme

$$\|\mathbf{v}\|_{1,\Phi} \leq c(\|f\|_\Phi + \|\mathbf{U}\|_{1,\Phi}) \leq c\left(\|f\|_\Phi + \|\mathbf{a}\|_{H_\Phi^{0,\Phi}}\right). \qquad \square$$

3.2 Úloha $\operatorname{div} \mathbf{v} = f$ nad Orliczovými prostory v případě známého Taylorova rozvoje funkce Φ

Mějme funkci Φ s těmito vlastnostmi:

1. Φ je Youngova funkce
2. $\Phi(z) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p!} \Phi^{(p)}(0) z^p, \ z \in [0, \infty)$.

Věta 3.3 *Nechť $f \in \widetilde{L}_\Phi(\Omega)$, kde Ω je omezená oblast s Lipschitzovskou hranicí. Nechť funkce f splňuje podmínku kompatibility* (3.1) *a nechť pro každé $p_0 \geq 1$ existuje p, $p \geq p_0$, takové, že $\Phi^{(p)}(0) \neq 0$. Dále předpokládejme, že existuje funkce $N(z)$ s vlastností*

$$N(z) \leq c \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\Phi^{(p)}(0)}{(2p)!} z^p \ \textit{pro}\ z \in [0, \infty).$$

Pak existuje řešení $\mathbf{v} \in W_0^1 L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)^N$ úlohy (3.2)–(3.3), *které vyhovuje nerovnosti*

$$\|\mathbf{v}\|_{1,\widetilde{\Phi}} \leq c \|f\|_\Phi,$$

pro Youngovu funkci $\widetilde{\Phi}$ takovou, že $\widetilde{\Phi}(z) \leq N(z)$ pro každé $z \in [0, \infty)$.

D ů k a z: Protože $f \in \widetilde{L}_\Phi(\Omega)$, tak existuje řešení úlohy (3.2)–(3.3) takové, že $\mathbf{v} \in W_0^{1,p}(\Omega)^N$ a toto řešení navíc splňuje nerovnost

$$\|\mathbf{v}\|_{1,p} \leq cp \|f\|_p$$

pro každé $p \in [2, \infty)$. Jedná se o důsledek reprezentace řešení pomocí slabě singulárního integrálu a tvaru konstanty pro odhady singulárních integrálů (viz. [9, str. 90]). Z Lebesgueovy věty pak pro funkce $G(z) = \sum_{i=1}^{N} \widetilde{\Phi}(z_i)$, $z = (z_1, \dots, z_N)$, a $\overline{G}(z) = \sum_{i,j=1}^{N} \widetilde{\Phi}(z_{ij})$, $z = [z_{ij}]_{i,j=1}^{N}$, dostáváme

$$\int_\Omega G(\mathbf{v}) \ dx + \int_\Omega \overline{G}(\nabla \mathbf{v}) \ dx \leq c \int_\Omega \Phi(cf) \ dx.$$

Z definice Luxemburgovy normy pak plyne

$$\|\mathbf{v}\|_{1,\widetilde{\Phi}} \leq c \|f\|_\Phi. \qquad \square$$

3.3 Úloha $\operatorname{div} \mathbf{v} = \operatorname{div} \mathbf{g}$ nad Orliczovými prostory

Nyní budeme zkoumat naši úlohu pro případ, kdy $f = \operatorname{div} \mathbf{g}$. Tedy pro danou funkci $\mathbf{g} \in H_{0,\Phi}(\Omega)$ s vlastností

$$\int_\Omega \operatorname{div} \mathbf{g} \, dx = 0 \tag{3.9}$$

hledáme vektor $\mathbf{v} : \Omega \to \mathbb{R}^N$ takový, že

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \operatorname{div} \mathbf{g}, \tag{3.10}$$
$$\mathbf{v} \in W_0^1 L_\Phi(\Omega)^N, \tag{3.11}$$
$$\|\mathbf{v}\|_{1,\Phi} \leq c \|\operatorname{div} \mathbf{g}\|_\Phi, \tag{3.12}$$
$$\|\mathbf{v}\|_\Phi \leq c \|\mathbf{g}\|_\Phi. \tag{3.13}$$

Věta 3.4 *Nechť Ω je omezená oblast s Lipschitzovskou hranicí. Dále předpokládejme, že $\mathbf{g} \in H_{0,\Phi}(\Omega)^N$ a splňuje podmínku kompatibility* (3.9). *Nechť Φ je Youngova funkce, která splňuje globální Δ_2-podmínku, a funkce Φ^γ je kvazikonvexní pro nějaké $\gamma \in (0,1)$. Pak existuje nejméně jedno řešení $\mathbf{v} \in W_0^1 L_\Phi(\Omega)^N$ úlohy* (3.10)–(3.13). *Jestliže navíc $\operatorname{div} \mathbf{g} \in C_0^\infty(\Omega)$, pak $\mathbf{v} \in C_0^\infty(\Omega)^N$.*

D ů k a z: Po použití stejného rozkladu Ω, jaký jsme použili v důkazu Věty 3.1, stačí najít řešení úlohy (3.1)–(3.4) a (3.13) pro $f = \operatorname{div} \mathbf{g}$. Existence tohoto řešení plyne z Věty 3.1 a odhady řešení (3.12) a (3.13) vyplývají z vlastností singulárního a slabě singulárního integrálu. □

3.4 Úloha $\operatorname{div} \mathbf{v} = f$ na vnějších oblastech

Nyní budeme zkoumat divergenční úlohu na vnějších oblastech.

Nechť Ω je vnější oblast v $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$. Pro danou funkci $f \in L_\Phi(\Omega)$ hledáme vektorovou funkci $\mathbf{v} : \Omega \to \mathbb{R}^N$ takovou, že

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = f, \tag{3.14}$$
$$\mathbf{v} \in D_0^1 L_\Phi(\Omega)^N, \tag{3.15}$$
$$|\mathbf{v}|_{1,\Phi} \leq c \|f\|_\Phi. \tag{3.16}$$

Věta 3.5 *Nechť Ω je vnější oblast s Lipschitzovskou hranicí. Dále předpokládejme, že Φ je Youngova funkce, která splňuje globální Δ_2-podmínku a funkce Φ^γ je kvazikonvexní pro nějaké $\gamma \in (0,1)$. Pak pro každou funkci $f \in L_\Phi(\Omega)$ existuje nejméně jedno řešení úlohy* (3.14)–(3.16).

D ů k a z: Nechť $\{f_m\}_{m=1}^{\infty} \subset C_0^{\infty}(\Omega)$ je posloupnost funkcí, které aproximují funkci f v prostoru $L_\Phi(\Omega)$. Položme

$$\mathbf{v}_m = \nabla\psi_m + \mathbf{w}_m,\ m \in \mathbb{N},$$

kde

$$\Delta\psi_m = f_m \text{ v } \mathbb{R}^N.$$

Definujme pro nějaké $r > 2\delta(\Omega^c)$ průměr komplementární oblasti $\delta(\Omega^c) := \sup_{x,y\in\Omega^c} |x-y|$. Funkce $\mathbf{w}_m$ je řešením rovnice

$$\operatorname{div}\mathbf{w}_m = 0 \text{ v } \Omega_r,\ \text{kde } \Omega_r := \Omega \cap B_r(0),$$

$$\mathbf{w}_m = -\nabla\psi_m \text{ na } \partial\Omega,$$

$$\mathbf{w}_m = 0 \text{ na } \partial B_r(0).$$

Z reprezentace $\psi_m = \mathcal{E} * f_m$, kde $\mathcal{E}$ je fundamentální řešení Laplaceovy rovnice, a z Vět 2.3 a 2.4 dostáváme

$$\|\psi_m\|_{2,\Phi} \le c\|f_m\|_\Phi.$$

Jelikož

$$\int_{\partial\Omega} \nabla\psi_m \cdot \mathbf{n}\, dS = 0 \text{ pro všechna } m \in \mathbb{N},$$

tak z Věty 3.2 plyne existence takového solenoidálního pole reprezentovaného funkcí $\mathbf{w}_m \in W^1L_\Phi(\Omega_r)^N$, která vyhovuje nerovnosti

$$\|\mathbf{w}_m\|_{1,\Phi} \le c\|\operatorname{div}(\phi\nabla\psi_m)\|_\Phi$$

pro $\phi \in C^1(\mathbb{R}^N)$ takové, že $\phi = 1$ jestliže $|x| < \frac{r}{2}$ a $\phi = 0$ pro $|x| \ge r$. Odtud plyne

$$\|\mathbf{w}_m\|_{1,\Phi} \le c\|f_m\|_\Phi\,.$$

Tedy funkce $\mathbf{v}_m$ jsou řešení naší úlohy s pravou stranou $f = f_m$. Zbytek důkazu je podobný důkazu Věty 3.1. □

Poznámka 3.6 Abychom dokázali existenci řešení pro případ nehomogenní okrajové podmínky $\mathbf{v} = \mathbf{a}$ na $\partial\Omega$, použijeme stejnou techniku jako v důkazu Věty 3.2.

3.5 **Úloha** $\operatorname{div} \mathbf{v} = f$ **pro** $f \in L^\infty(\Omega)$

Zkoumání řešitelnosti divergenční úlohy zakončíme případem, kdy na pravé straně je zadaná omezená funkce. Nechť je tedy dána funkce $f \in L^\infty(\Omega)$ taková, že

$$\int_\Omega f \; dx = 0. \tag{3.17}$$

Hledáme vektor $\mathbf{v}$ takový, že

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = f, \tag{3.18}$$

$$\mathbf{v} \in W_0^1 L_{\Psi_1}(\Omega)^N, \tag{3.19}$$

$$\|\mathbf{v}\|_{1,\Psi_1} \leq c\|f\|_\infty, \tag{3.20}$$

kde Ψ_1 je Youngova funkce definovaná v Definici 1.30.

Věta 3.7 *Nechť* Ω *je omezená oblast s Lipschitzovskou hranicí. Pak úloha* (3.17)–(3.20) *má alespoň jedno řešení* $\mathbf{v} \in W_0^1 L_{\Psi_1}(\Omega)^N$. *Jestliže* $f \in C_0^\infty(\Omega)$, *pak* $\mathbf{v} \in C_0^\infty(\Omega)^N$.

D ů k a z: Nechť $f \in C_0^\infty(\Omega)$. Jak jsme již viděli v důkazu Věty 3.1 stačí předpokládat, že Ω je hvězdicovitá oblast ve vztahu k otevřené kouli. Z reprezentace řešení naší úlohy plyne, že $\frac{\partial}{\partial x_j} v_i$ obsahuje singulární integrál, který je generován singulárním jádrem ve tvaru

$$K_{ij}(x, x-y) := \frac{\delta_{ij}}{|x-y|^N} \int_0^\infty \omega\left(x + r\frac{x-y}{|x-y|}\right) r^{N-1} \, dr$$

$$+\frac{x_i - y_i}{|x-y|^{N+1}} \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x_j}\omega\left(x + r\frac{x-y}{|x-y|}\right) r^N \, dr =: \frac{k_{ij}(x, x-y)}{|x-y|^N}, \tag{3.21}$$

kde funkce $k_{ij}(x,z)$ splňuje Calderónovy-Zygmundovy podmínky (viz. [9, str. 119]). Dále budeme chtít dokázat, že

$$\|T_{ij,\epsilon} f\|_{BMO} \leq c\|f\|_{C(\overline{\Omega})} \tag{3.22}$$

pro funkci $f \in C_0^\infty(\Omega)$ a konstantu c nezávislou na ϵ, kde

$$T_{ij,\epsilon} f(x) := \int_{\mathbb{R}^N} K_{ij,\epsilon}(x, x-y) f(y) \; dy.$$

Nechť $\tilde{B}$ je koule se středem v bodě x_0 a $\tilde{B}^*$ je koule se stejným středem ale dvojnásobným poloměrem. Rozložme funkci f takto: $f = f_1 + f_2$, kde $f_1 := f\chi_{\tilde{B}^*}$ a $f_2 := f\chi_{(\tilde{B}^*)^c}$. Pak z klasické teorie singulárních integrálů plyne

$$\int_{\tilde{B}} |T_{ij,\epsilon} f_1| \, dx \le |\tilde{B}|^{1/2} \|T_{ij,\epsilon} f_1\|_2 \le c|\tilde{B}|^{1/2} \|f_1\|_2 \le c|\tilde{B}| \|f\|_\infty .$$

Definujme $c_{\tilde{B},\epsilon} := \int_{(\tilde{B}^*)^c} K_{ij,\epsilon}(x_0, x_0 - y) f(y) \, dy$. V další části důkazu budeme pro jednoduchost a bez újmy na obecnosti předpokládat, že $x_0 = 0$. Zbývá ověřit, že

$$|T_{ij,\epsilon} f_2(x) - c_{\tilde{B},\epsilon}| \le c\|f\|_{C(\overline{\Omega})}$$

pro s.v. $x \in \tilde{B} \cap \Omega$ a konstantu c nezávislou na ϵ. Tento odhad je ale důsledkem odhadu (po substituci $z = -y$, $\Omega \to \widetilde{\Omega}$)

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\tilde{B}\cap\Omega} \int_{\{|z|\ge 2|x|\}\cap\widetilde{\Omega}} |K_{ij,\epsilon}(x, x+z) - K_{ij,\epsilon}(0, z)| \, dz$$

$$\le \operatorname*{ess\,sup}_{\tilde{B}\cap\Omega} \int_{\{|z|\ge 2|x|\}\cap\widetilde{\Omega}} |K_{ij,\epsilon}(x, x+z) - K_{ij,\epsilon}(0, x+z)| \, dz$$

$$+ \operatorname*{ess\,sup}_{\tilde{B}\cap\Omega} \int_{\{|z|\ge 2|x|\}\cap\widetilde{\Omega}} |K_{ij,\epsilon}(0, x+z) - K_{ij,\epsilon}(0, z)| \, dz \le c < +\infty, \tag{3.23}$$

kde je nutné ověřit, že konstanta c nezávisí na ϵ. Z (3.23) a z věty o střední hodnotě diferenciálního počtu pro $x \in \tilde{B} \cap \Omega$ plynou pro limitní stav $\epsilon = 0$ odhady

$$|K_{ij}(x, x+z) - K_{ij}(0, x+z)| \le c \frac{|x|}{|z|^N}$$

a

$$|K_{ij}(0, x+z) - K_{ij}(0, z)| \le c \left(\frac{|x|}{|z|^{N+1}} + \frac{|x|}{|z|^N} \right),$$

pro $x \in \tilde{B} \cap \Omega$ a $z \in \{|z| \ge 2|x|\} \cap \widetilde{\Omega}$. Pro $\epsilon \in (0,1)$ lze odvodit analogickým způsobem stejné odhady jenom se musí navíc zahrnout případy

$$\int_{\{|z|\ge 2|x|\}\cap\widetilde{\Omega}\cap\{|x+z|<\epsilon\}\cap\{|z|\ge\epsilon\}} |K_{ij,\epsilon}(0, x+z) - K_{ij,\epsilon}(0, z)| \, dz$$

$$= \int_{\{|z|\ge 2|x|\}\cap\widetilde{\Omega}\cap\{|x+z|<\epsilon\}\cap\{|z|\ge\epsilon\}} |K_{ij,\epsilon}(0, z)| \, dz \le c \int_{\epsilon\le|z|\le 2\epsilon} \frac{1}{|z|^N} \, dz \le C$$

a
$$\int_{\{|z|\geq 2|x|\}\cap\widetilde{\Omega}\cap\{|x+z|\geq\epsilon\}\cap\{|z|<\epsilon\}} |K_{ij,\epsilon}(0,x+z)-K_{ij,\epsilon}(0,z)|\ dz$$
$$= \int_{\{|z|\geq 2|x|\}\cap\widetilde{\Omega}\cap\{|x+z|\geq\epsilon\}\cap\{|z|<\epsilon\}} |K_{ij,\epsilon}(0,x+z)|\ dz \leq c\int_{\frac{2}{3}\epsilon\leq|z|\leq\epsilon} \frac{1}{|z|^N}\ dz \leq C$$

pro $x \in \tilde{B}\cap\Omega$, kde konstanta C nezávisí na ϵ a x. Při odvození výše uvedených odhadů jsme využili skutečnosti, že $|x+z| \geq |z|/2$ a $|x+z| \leq \frac{3}{2}|z|$. Zbývá ukázat, že $|c_{\tilde{B},\epsilon} - \frac{1}{\tilde{B}}\int_{\tilde{B}} T_{ij,\epsilon}f\ dx| \leq c\|f\|_{C(\overline{\Omega})}$. To ale odvodíme s pomocí stejného postupu jako v případě $T_{ij,\epsilon}f_2$. Stejným způsobem jako v důkazu Věty 2.3 ukážeme, že posloupnost $T_{1/n}f$ je konvergentní v $BMO(\mathbb{R}^N)$ a tedy

$$\|T_{ij}f\|_{BMO} \leq c\|f\|_{C(\overline{\Omega})} \tag{3.24}$$

pro $f \in C_0^\infty(\Omega)$. Je zřejmé, že odhad (3.24) by bylo možné odvodit i pro funkce $f \in C(\overline{\Omega})$.

Pro $w \in \widetilde{L}_{\Phi_1}(\Omega)$ platí odhad $\|w\|_{\mathcal{H}^1} \leq \int_\Omega \Phi_1(w)\ dx + c$ (viz. [28, str. 33-34] nebo [29, str. 57]). Navíc prostor $BMO(\mathbb{R}^N)$ je duální prostor k $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^N)$ a platí nerovnost ([29, str. 142])

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N} vw\ dx\right| \leq \|v\|_{BMO}\|w\|_{\mathcal{H}^1}.$$

Odtud vyplývá pro řešení úlohy (3.17)–(3.20) odhad

$$\|\mathbf{v}\|_{1,\Psi_1} \leq c\|f\|_{C(\overline{\Omega})} \tag{3.25}$$

pro $f \in C_0^\infty(\Omega)$.

Pro každou funkci $f \in L^\infty(\Omega)$ existuje posloupnost funkcí $\{f_m\}_{m=1}^\infty$ taková, že $f_m \in C_0^\infty(\Omega)$ a $f_m \to f$ v $L^p(\Omega)$ pro všechna $p \in [1,\infty)$. Pak posloupnost $\{g_m\}_{m=1}^\infty$, $g_m := f_m - \phi\int_\Omega f_m\ dx$, kde $\int_\Omega \phi\ dx = 1$, konverguje rovněž k funkci f a platí nerovnost $\|g_m\|_\infty \leq c\|f\|_\infty$. Tato nerovnost plyne z konstrukce funkcí g_m, při které používáme regularizátory. Z E_{Φ_1}-slabé konvergence funkcí $\nabla\mathbf{v}_m$ (resp. vybrané podposloupnosti) vyplývá, že

$$\int_\Omega \operatorname{div}\mathbf{v}\,\varphi\ dx = \int_\Omega f\varphi\ dx$$

pro každé $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ a tedy

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = f \text{ s.v. v } \Omega.$$

Není problém ověřit, že posloupnost $\{\mathbf{v}_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje slabě k jedinému limitnímu prvku, neboť z klasické teorie plyne silná konvergence v libovolném prostoru $W_0^{1,p}(\Omega)$ pro $p \in (1, \infty)$.

Dokázali jsme tedy s použitím Lemma 1.46 existenci řešení úlohy (3.17)–(3.20), které splňuje nerovnost

$$\|\mathbf{v}\|_{1,\Psi_1} \leq c\|f\|_\infty.$$

Navíc operátor S generovaný úlohou (3.17)–(3.20) takový, že $S(f)$ reprezentuje řešení úlohy, je spojitý a lineární, což plyne z linearity operátoru S nad $L^p(\Omega)$ pro $p \in (1, \infty)$ a tedy i nad $L^\infty(\Omega)$ a z nerovnosti (3.20). □

Poznámka 3.8 Zmiňme zde ještě jednu metodu důkazu odhadu

$$\|Tf\|_M \leq c\|f\|_\infty,$$

pro Youngovu funkci $M(z) = e^z - z - 1$. Zde stačí využít tvaru konstanty při odhadu singulárních integrálů nad prostory $L^p(\Omega)$. Z Calderónových-Zygmundových podmínek totiž plyne pro náš singulární integrál odhad (viz. [9. str. 90-91])

$$\|Tf\|_p \leq cp\|f\|_p. \tag{3.26}$$

Jestliže ukážeme, že existuje konstanta K taková, že

$$\left(\frac{p}{K}\right)^{p+2} \leq p!$$

pro $p \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, pak z Taylorova rozvoje funkce M, z Leviho věty a z (3.26) dostaneme

$$\int_\Omega M\left(\frac{|Tf|}{cK\|f\|_\infty}\right)\,dx \leq \lim_{n\to\infty}\int_\Omega \sum_{p=2}^{n}\frac{1}{p!}\left(\frac{|Tf|}{cK\|f\|_\infty}\right)^p\,dx$$

$$\leq \sum_{p=2}^{\infty}\left(\frac{p}{K}\right)^p\frac{1}{p!} \leq c\sum_{p=2}^{\infty}\frac{1}{p^2} \leq c.$$

Zbytek pak plyne ihned z Luxemburgovy definice normy. Existenci konstanty K ověříme matematickou indukcí. Zmiňme jen její závěrečnou část. Tedy

$$(p+1)! = (p+1)p! \geq (p+1)\left(\frac{p}{K}\right)^{p+2}.$$

Zbývá ověřit

$$(p+1)\left(\frac{p}{K}\right)^{p+2} \geq \frac{p+1}{K}\left(\frac{p+1}{K}\right)^{p+2}$$

a tedy ekvivalentně

$$K \geq \left(1+\frac{1}{p}\right)^{p}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{2}.$$

Jelikož $\lim_{p\to\infty}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{p} = e$, tak takové K existuje a je omezené.

Důsledek 3.9 *Nechť* $\mathbf{g} \in L^\infty(\Omega)^N$, $\operatorname{div}\mathbf{g} \in L_{\Psi_1}(\Omega)$ *a* $\mathbf{g}\cdot\mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0$. *Nechť* S *je operátor generovaný úlohou* (3.17)–(3.20) (*t.j.* $S(f) = \mathbf{v}$). *Pak funkce* $S(\operatorname{div}\mathbf{g})$ *je dobře definovaná nad prostorem* $L_{\Psi_1}(\Omega)$ *a vyhovuje následujícímu odhadu*

$$\|S(\operatorname{div}\mathbf{g})\|_{\Psi_1} \leq c\|\mathbf{g}\|_\infty. \tag{3.27}$$

D ů k a z: Operátor $S(\operatorname{div}\mathbf{g})$ je dobře definovaný v prostoru $L^p(\Omega)$ pro $p \in (1,\infty)$. Navíc existuje posloupnost $\{\mathbf{g}_n\}_{n=1}^\infty \subset C_0^\infty(\Omega)$ taková, že $\operatorname{div}\mathbf{g}_n \to \operatorname{div}\mathbf{g}$ v $L^p(\Omega)$ a $\mathbf{g}_n \to \mathbf{g}$ v $L^p(\Omega)^N$ pro libovolné $p \in (1,\infty)$ (viz. [9, str. 115]). Současně

$$\|S(\operatorname{div}\mathbf{g}_n)\|_{\Psi_1} \leq c\|\mathbf{g}\|_\infty \text{ pro } \forall n \in \mathbb{N}$$

podle Věty 3.7. Pak existuje podposloupnost taková, že $S(\operatorname{div}\mathbf{g}_{n_k}) \overset{\Phi_1}{\rightharpoonup} \overline{S}$ a jako důsledek linearity operátoru S dostáváme $S(\operatorname{div}\mathbf{g}_n) \to S(\operatorname{div}\mathbf{g})$ v $L^p(\Omega)$. Odtud plyne $S(\operatorname{div}\mathbf{g}) = \overline{S}$ s.v. v Ω, neboť pro každé ϵ a pro každé $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ existuje n_0 takové, že

$$\left|\int_\Omega \big(\overline{S} - S(\operatorname{div}\mathbf{g})\big)\,\phi\,dx\right| \leq \left|\int_\Omega \big(\overline{S} - S(\operatorname{div}\mathbf{g}_{n_0})\big)\,\phi\,dx\right|$$
$$+\left|\int_\Omega \big(S(\operatorname{div}\mathbf{g}) - S(\operatorname{div}\mathbf{g}_{n_0})\big)\,\phi\,dx\right| \leq \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}. \qquad \square$$

4 Existence řešení Navierových-Stokesových rovnic pro proudění izotermálních stlačitelných tekutin s nelineárním tenzorem napětí a jeho kvalitativní vlastnosti

V této kapitole dokážeme existenci slabého řešení Navierových-Stokesových rovnic popisujících proudění stlačitelných izotermálních tekutin s nelineárním tenzorem napětí a dále zde bude zodpovězena otázka ohledně stabilizace řešení pro čas jdoucí k nekonečnu. Zkoumaný model se skládá z rovnic:

1. rovnice kontinuity

$$\rho_t + \operatorname{div}(\rho\mathbf{u}) = 0 \tag{4.1}$$

a

2. rovnice popisující rovnováhu momentů

$$(\rho\mathbf{u})_t + \operatorname{div}(\rho\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}) + \nabla\rho - \operatorname{div} P(\mathbf{u}) = \rho\mathbf{f}. \tag{4.2}$$

Systém budeme studovat za okrajové podmínky Dirichletova typu

$$\mathbf{u}(x,t) = 0,\ x \in \partial\Omega,\ t \in (0,T),\ T > 0, \tag{4.3}$$

a počáteční stav předepíšeme podmínkami

$$\rho(x,0) = \rho_0(x) \geq 0,\ x \in \Omega, \tag{4.4}$$

$$(\rho\mathbf{u})(x,0) = \mathbf{q}_0,\ x \in \Omega, \tag{4.5}$$

kde Ω je omezená oblast v $\mathbb{R}^N$ a je třídy $C^{2+\mu}$ pro $\mu > 0$. Funkce ρ zde značí hustotu, $\mathbf{u}$ reprezentuje rychlostní vektor, $P(\mathbf{u})$ je tenzor napětí a $\mathbf{f}$ je vnější síla. Co se týká tlaku, předpokládáme u izotermálních tekutin lineární závislost tlaku na hustotě, t.j. $p(\rho) = \rho$ (v normalizovaném tvaru).

4.1 Existence řešení Navierových-Stokesových rovnic pro proudění izotermálních stlačitelných tekutin s nelineárním tenzorem napětí.

Tato kapitola je inspirována článkem [7]. Ukážeme zde, že metodu použitou v tomto článku lze aplikovat i na naše rovnice a že tato metoda dává lepší výsledky ohledně hustoty než bylo známo z [21] a [22]. Konkrétně lze ukázat, že $\rho \in L^\infty(0,T; L_{\Phi_\beta}(\Omega))$ pro $\beta > 2$ s počátečním stavem $\rho_0 \in L_{\Phi_\beta}(\Omega)$. V [21] a [22] je dokázána existence slabého řešení pro případ $\beta > 7/2$.

4.1.1 Úvod

Nejdříve systém (4.1)–(4.5) doplníme podmínkami na tenzor napětí P. Pro jednoduchost použijeme Youngovu funkci M (viz. Definice 1.30). Předpokládejme, že tenzor P má tyto vlastnosti:

1. P je koercivní. To znamená

$$\int_\Omega P(\mathbf{v}) : D\mathbf{v}\; dx \geq \int_\Omega M(D\mathbf{v})\; dx \tag{4.6}$$

   pro každou funkci $\mathbf{v} \in X$;

2. P je monotónní, tedy

$$\int_\Omega (P(\mathbf{v}) - P(\mathbf{w})) : (D\mathbf{v} - D\mathbf{w})\; dx \geq 0 \tag{4.7}$$

   pro libovolné funkce $\mathbf{v}$ a $\mathbf{w}$ z X;

3. P je omezený v následujícím smyslu

$$\int_\Omega \overline{M}(P(\mathbf{v}))\; dx \leq c\left(1 + \int_\Omega M(D\mathbf{v})\; dx\right) \tag{4.8}$$

   pro všechny funkce $\mathbf{v} \in X$ a nechť $P(\mathbf{v} - \epsilon\mathbf{l}) \xrightarrow{M} P(\mathbf{v})$ pro $\epsilon \to 0$ a všechny funkce $\mathbf{v} \in Y$ takové, že $D\mathbf{v} \in \widetilde{L}_M(Q_T)$, a $\mathbf{l} \in C_0^\infty(Q_T)^N$;

4. P splňuje odhad

$$\int_0^T \int_\Omega |P(\mathbf{v}_1) - P(\mathbf{v}_2)|\; dxdt$$

$$\leq c(T,\kappa)\int_0^T \|D\mathbf{v}_1(t) - D\mathbf{v}_2(t)\|_\infty \, dt \tag{4.9}$$

pro $\mathbf{v}_i \in M_\kappa$, kde $i = 1, 2$. Množina M_κ je definována následovně

$$M_\kappa := \{\mathbf{v} \in C([0,T]; W_0^{1,2}(\Omega)^N) \cap L^\infty(0,T; W^{1,\infty}(\Omega)^N);$$

$$\|\mathbf{v}(t)\|_\infty + \|\nabla \mathbf{v}(t)\|_\infty \leq \kappa \text{ pro všechna } t \in [0,T]\};$$

5. pro posloupnost $\{D\mathbf{u}_n\}_{n=1}^\infty \subset \widetilde{L}_M(Q_T)$ takovou, že

$$D\mathbf{u}_n \stackrel{M}{\rightharpoonup} D\mathbf{u} \text{ v } L_M(Q_T)^{N\times N}$$

a

$$\int_0^T \int_\Omega P(\mathbf{u}_n) : D\mathbf{u}_n \, dxds \leq c \text{ pro } \forall n \in \mathbb{N},$$

platí, že

$$\liminf_{n\to\infty} \int_0^t \int_\Omega P(\mathbf{u}_n) : D\mathbf{u}_n \, dxds \geq \int_0^t \int_\Omega P(\mathbf{u}) : D\mathbf{u} \, dxds \tag{4.10}$$

pro každé $t \in [0,T]$.

Příklad tenzoru napětí P: Definujme tenzor $P(\mathbf{v})$ následujícím způsobem:

$$P(\mathbf{v}) := \frac{M(D\mathbf{v})D\mathbf{v}}{|D\mathbf{v}|^2} \text{ pro } D\mathbf{v} \neq 0 \text{ a } P(\mathbf{v}) := 0 \text{ pro } D\mathbf{v} = 0.$$

Podívejme se nyní, zda jsou splněny všechny výše uvedené vlastnosti.

1. Koercivita je zřejmá.

2. Monotonie:

$$\int_\Omega (P(\mathbf{v}) - P(\mathbf{w})) : (D\mathbf{v} - D\mathbf{w}) \, dx = \int_\Omega \frac{M(D\mathbf{v})|D\mathbf{v}|^2}{|D\mathbf{v}|^2} \, dx$$

$$+ \int_\Omega \frac{M(D\mathbf{w})|D\mathbf{w}|^2}{|D\mathbf{w}|^2} \, dx - \int_\Omega \frac{M(D\mathbf{v})}{|D\mathbf{v}|^2} D\mathbf{w} : D\mathbf{v} \, dx$$

$$- \int_\Omega \frac{M(D\mathbf{w})}{|D\mathbf{w}|^2} D\mathbf{v} : D\mathbf{w} \, dx = (*).$$

Z nerovnosti

$$|a_1b_1 + \ldots + a_nb_n| \leq \sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}\sqrt{b_1^2 + \ldots + b_n^2}$$

plyne, že

$$(*) \geq \int_\Omega \left(\frac{M(D\mathbf{v})|D\mathbf{v}|}{|D\mathbf{v}|^2} - \frac{M(D\mathbf{w})|D\mathbf{w}|}{|D\mathbf{w}|^2} \right) (|D\mathbf{v}| - |D\mathbf{w}|)\; dx \geq 0.$$

3. Pro omezenost stačí ověřit, že

$$\ln \left(1 + \frac{e^z - z - 1}{z} \right) \leq z$$

pro $z \geq 0$. To ale vyplývá z nerovnosti $1 + \frac{e^z - z - 1}{z} \leq e^z$. Slabá konvergence ihned plyne ze silné konvergence $\mathbf{v} - \epsilon \mathbf{l}$ a Lebesgueovy věty.

4. Nerovnost (4.9) plyne z toho, že funkce $\frac{e^z-z-1}{z}$ má omezené derivace na intervalu $[0, \kappa]$. Zřejmě

$$\left(\frac{e^z - z - 1}{z} \right)' = \frac{ze^z - z - e^z + z + 1}{z^2}$$

a použijeme-li jedenkrát l'Hospitalovo pravidlo, pak dostaneme

$$\lim_{z \to 0} \frac{ze^z - e^z + 1}{z^2} = \lim_{z \to 0} \frac{e^z}{2} = \frac{1}{2}.$$

5. Slabá polospojitost zdola plyne ihned z G-diferencovatelnosti, konvexity funkce M a následující nerovnosti

$$\begin{aligned} c &\geq \liminf_{n \to \infty} \int_0^t \int_\Omega M(D\mathbf{u}_n)\; dxds \\ &\geq \lim_{k \to 1+} \liminf_{n \to \infty} \int_0^t \int_\Omega M \left(\frac{D\mathbf{u}_n}{k} \right)\; dxds \\ &\geq \lim_{k \to 1+} \left(\liminf_{n \to \infty} \frac{1}{k} \int_0^t \int_\Omega M_1 \left(\frac{D\mathbf{u}}{k} \right) (D\mathbf{u}_n - D\mathbf{u})\; dxds \right. \\ &\left. + \int_0^t \int_\Omega M \left(\frac{D\mathbf{u}}{k} \right)\; dxds \right) = \int_0^t \int_\Omega M(D\mathbf{u})\; dxds, \end{aligned}$$

kde $M_1(z) = e^{|z|} - 1$ a $t \in [0, T]$. Limitní přechod s pomocí k volíme z toho důvodu, protože není zcela jasné, zda integrál $\int_0^t \int_\Omega M_1(D\mathbf{u})(D\mathbf{u}_n - D\mathbf{u})\; dxds$ musí být konečný.

Je třeba zmínit, že další postup platí i pro jinak definované funkce M s růstem větším než e^z ale jen při zachování všech výše uvedených podmínek. Důvod, proč požadujeme pro tenzor napětí exponenciální růsty, můžeme například nalézt v teorii o renormalizovaném řešení rovnice kontinuity v odhadu (4.16), který vyžaduje právě takovou integrabilitu symetrické části gradientu vektoru rychlosti přes prostorové proměnné.

4.1.2 Renormalizované řešení rovnice (4.1)

Lemma 4.1 *Nechť funkce* $\mathbf{u} \in L^1(0,T;X)$ *a* $\rho \in L^\infty(0,T;L_{\Phi_\beta}(\Omega))$*, pro* $\beta > 2$*, jsou řešením rovnice* (4.1) *v prostoru* $\mathcal{D}'(Q_T)$*. Prodloužíme-li nulou funkce* ρ *a* $\mathbf{u}$ *vně oblasti* Ω*, pak dostaneme, že rovnice*

$$\rho_t + \operatorname{div}(\rho\mathbf{u}) = 0 \tag{4.11}$$

je splněna v prostoru $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N \times (0,T))$.

D ů k a z: K důkazu lemma použijeme stejnou metodu jako v [7]. Definujme funkci

$$\vartheta_h(x) := \frac{1}{h^N}\vartheta\left(\frac{|x|}{h}\right), \tag{4.12}$$

kde

$$\vartheta \in C^\infty(\mathbb{R}),\ supp\ \vartheta \subset (-1,1),\ \vartheta \geq 0,\ -\int_0^1 \vartheta'(z)z\ dz = 1,$$

$$\vartheta(-z) = \vartheta(z),\ \vartheta'(z) \leq 0 \text{ pro každé } z \geq 0$$

a $h \in (0,1)$. Nechť $g : \mathbb{R} \to [0,1]$ je nekonečně spojitě diferencovatelná funkce s následujícími vlastnostmi:

$$g(z) = 0 \text{ pro každé } z \in (-\infty, \frac{1}{4}],\ |g'(z)| \leq 3 \text{ pro } z \in (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$$

a

$$g(z) = 1,\ \text{jestliže } z \in [\frac{3}{4}, \infty).$$

Nakonec definujeme posloupnost funkcí $\{\phi_m\}_{m=1}^\infty$ takto:

$$\phi_m := g(m\vartheta_h * dist(x, \partial\Omega)) \text{ pro } 0 < h < \frac{1}{8m},$$

kde symbol $*$ znamená konvoluci a $dist(x, \partial\Omega) = 0$ pro $x \in \mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}$. Lze snadno ověřit, že

$$0 \leq \phi_m \leq 1 \text{ na } \Omega, \; \phi_m = 1, \text{ jestliže } dist(x, \partial\Omega) \geq \frac{1}{m},$$

$$|\nabla \phi_m(x)| \leq Cm \text{ pro každé } x \in \Omega, \; \phi_m \in C_0^\infty(\Omega).$$

Vezmeme libovolnou funkci $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N \times (0,T))$ a součin funkcí $\varphi\phi_m$ jako testovací funkci rovnice (4.1). Odtud

$$0 = \int_0^T \int_\Omega \rho\varphi_t\phi_m + \phi_m\rho\mathbf{u} \cdot \nabla\varphi + \varphi\rho\mathbf{u} \cdot \nabla\phi_m \; dxdt.$$

Zbývá ověřit

$$\left| \int_0^T \int_\Omega \varphi\rho\mathbf{u} \cdot \nabla\phi_m \; dxdt \right| \to 0 \text{ pro } m \to \infty.$$

Tato limita plyne z následujícího odhadu

$$\left| \int_0^T \int_{dist(x,\partial\Omega) \leq \frac{1}{m}} \varphi\rho\mathbf{u} \cdot \nabla\phi_m \; dxdt \right| \leq c \int_0^T \int_{dist(x,\partial\Omega) \leq \frac{1}{m}} \rho \frac{|\mathbf{u}|}{dist(x, \partial\Omega)} \; dxdt$$

$$\leq c \left(\frac{1}{m} \right) \int_0^T \|\rho(t)\|_{\Phi_\beta, dist(x,\partial\Omega) \leq \frac{1}{m}} \left\| \frac{\mathbf{u}(t)}{dist(x, \partial\Omega)} \right\|_{\Psi_2, dist(x,\partial\Omega) \leq \frac{1}{m}} dt = I^\triangle.$$

Z Věty 8.4 v [14, str. 69] pro $k = 1$, $\epsilon = 0$ a $\eta = -p$ vyplývá, že

$$\|v\|_{p, dist(x,\partial\Omega), -p} \leq c\|v\|_{1,p},$$

kde konstanta c nezávisí na p pro $p \geq 2$. Z Tvrzení 1.38 a z Lemma 1.39 pak plyne

$$I^\triangle \leq c \left(\frac{1}{m} \right) \int_0^T \|D\mathbf{u}(t)\|_{M, dist(x,\partial\Omega) \leq \frac{1}{m}} \; dt \to 0$$

pro $m \to \infty$. $\square$

Lemma 4.2 *Nechť funkce $\rho \in L^\infty(0,T; L_{\Phi_\beta}(\Omega))$ pro $\beta > 2$ a $\mathbf{u}$ taková, že $D\mathbf{u} \in L_M(0,T; L_M(\Omega)^{N \times N})$, vyhovují rovnici (4.1) v prostoru $\mathcal{D}'(Q_T)$. Po prodloužení funkcí ρ a $\mathbf{u}$ nulou vně oblasti Ω definujme funkci $\rho_h = \rho * \vartheta_h$, kde funkce ϑ_h byla definována v (4.12). Pak dostáváme, že*

$$(\rho_h)_t + \operatorname{div}(\rho_h\mathbf{u}) = r_h \;\; s.v. \;\; v \; \mathbb{R}^N \times (0,T), \tag{4.13}$$

kde $r_h \to 0$ v prostoru $L_M(0,T;L_{\Phi_{\beta-2}}(\Omega))$. Funkce ρ pak je renormalizované řešení rovnice (4.1)*, t.j.*

$$(b(\rho))_t + \mathrm{div}(b(\rho)\mathbf{u}) + (\rho b'(\rho) - b(\rho))\mathrm{div}\,\mathbf{u} = 0 \ \ v\ \mathcal{D}'(Q_T) \tag{4.14}$$

pro libovolnou spojitě diferencovatelnou funkci b takovou, že b a b' jsou omezené na $\mathbb{R}_0^+$.

D ů k a z: Vezmeme funkci $\varphi(x,t) = \psi(t)\vartheta_h(x-y)$ jako testovací funkci rovnice (4.11), což vede na rovnici

$$(\rho_h)_t + \mathrm{div}\,(\rho_h \mathbf{u}) = r_h \text{ s.v. v } \mathbb{R}^N \times (0,T), \tag{4.15}$$

kde funkce r_h má tvar

$$r_h := \mathrm{div}\,(\rho_h \mathbf{u}) - \nabla\vartheta_h * (\rho\mathbf{u})$$

a nebo v ekvivalentním vyjádření

$$r_h = \rho_h \mathrm{div}\,\mathbf{u} + \int_{\mathbb{R}^N} (\mathbf{u}(x) - \mathbf{u}(y)) \cdot \nabla\vartheta_h(x-y)\rho(y)\ dy.$$

Nyní chceme ukázat, že $r_h \to 0$ v prostoru $L_M(0,T;L_{\Phi_{\beta-2}}(\Omega))$. Nejdříve ale ukážeme omezenost funkcí r_h právě v tomto prostoru. Technika odhadu je následující

$$\left| \int_\Omega w(x)\rho_h(x,t)\mathrm{div}\,\mathbf{u}(x,t)\ dx \right| \leq \|D\mathbf{u}(t)\|_M \|\rho_h(t)w\|_{\Phi_1}$$

pro funkci $w \in \widetilde{L}_{\Psi_{\beta-2}}(\Omega)$ takovou, že $\int_\Omega \Psi_{\beta-2}(w(x))\ dx \leq 1$. Pro integrál z definice funkce r_h dostáváme

$$\begin{aligned}
&\left| \int_\Omega |w(x)| \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\mathbf{u}(x,t) - \mathbf{u}(x-z,t)|}{|z|} \cdot |\nabla\vartheta_h(z)||z|\rho(x-z,t)\ dzdx \right| \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\vartheta_h(z)||z| \int_\Omega \frac{|\mathbf{u}(x,t) - \mathbf{u}(x-z,t)|}{|z|}\rho(x-z,t)|w(x)|\ dxdz \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\vartheta_h(z)||z| \left\| \frac{|\mathbf{u}(\cdot,t) - \mathbf{u}(\cdot - z,t)|}{|z|} \right\|_{\Psi_2} \|\rho(\cdot - z,t)w(\cdot)\|_{\Phi_2}\ dz \\
&\leq c \sup_{z\in\mathbb{R}^N} \left\| \frac{|\mathbf{u}(\cdot,t) - \mathbf{u}(\cdot - z,t)|}{|z|} \right\|_{\Psi_2} |||\rho(t)|||_{\Phi_\beta} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\vartheta_h(z)||z|\ dz
\end{aligned}$$

$$\leq c\|\mathbf{u}(t)\|_{1,\Psi_2}|||\rho(t)|||_{\Phi_\beta}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla\vartheta_h(z)\|z|dz \leq c\|D\mathbf{u}(t)\|_M|||\rho(t)|||_{\Phi_\beta}. \quad (4.16)$$

Při odvozování odhadu (4.16) jsme použili Lemma 1.40 a následující nerovnost

$$\|\rho(\cdot - z,t)w(\cdot)\|_{\Phi_2} \leq \|\rho(\cdot - z,t)\|_{\Phi_\beta}\|ww_1\|_{\Psi_\beta} \leq c|||\rho(t)|||_{\Phi_\beta}$$

pro $\int_\Omega \Psi_2(w_1(x))\ dx \leq 1$. Posledně zmíněnou nerovnost odvodíme z odhadu

$$\int_\Omega \Phi_\beta\left(\frac{\rho(x-z,t)}{\lambda}\right)\ dx \leq \int_\Omega \Phi_\beta\left(\frac{\rho(y,t)}{\lambda}\right)\ dy \text{ pro } \lambda > 0$$

díky nulovému prodloužení ρ a definici Luxemburgovy normy spolu s nerovností

$$\int_\Omega \Psi_\beta(ww_1)\ dx \leq \frac{\beta-2}{\beta}\int_\Omega \Psi_\beta(w^{\frac{\beta}{\beta-2}})\ dx + \frac{2}{\beta}\int_\Omega \Psi_\beta(w_1^{\beta/2})\ dx$$

$$\leq c_1\left(\int_\Omega \Psi_{\beta-2}(w)\ dx + \int_\Omega \Psi_2(w_1)\ dx\right) + c,$$

což plyne z Lemma 1.32. Tedy funkce $r_h \in L_M(0,T;L_{\Phi_{\beta-2}}(\Omega))$, jestliže $\rho \in L^\infty(0,T;L_{\Phi_\beta}(\Omega))$.

Nyní zbývá ukázat, že r_h konverguje k nule v odpovídajícím prostoru pro $h \to 0+$. Odtud pak plyne přechod k rovnici (4.14). Tento důkaz lze ale provést analogickým způsobem jako v [18, str. 43] s použitím odhadu (4.16). Odtud

$$\|r_h\|_{L_M(0,T;L_{\Phi_{\beta-2}}(\Omega))} = \|\mathrm{div}\,(\rho_h\mathbf{u}) - (\rho\mathbf{u}) * \nabla\vartheta_h\|_{L_M(0,T;L_{\Phi_{\beta-2}}(\Omega))} \to 0$$

pro $h \to 0+$.

Na závěr důkazu uděláme malou poznámku k přechodu k rovnici (4.14). Z rovnice (5.1) vyplývá následující rovnost

$$\int_0^T \eta'(t)\int_\Omega \rho(x,t)\phi(x)\ dxdt = -\int_0^T \eta(t)\int_\Omega \rho(x,t)\mathbf{u}(x,t)\nabla\phi(x)\ dxdt$$

pro funkci $\eta \in C_0^\infty(0,T)$ a $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$. Odtud plyne, že funkce

$$\int_\Omega \rho(x,t)\phi(x)\ dx$$

je spojitá pro libovolné $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ a tedy $\rho \in C(0,T;L_{\Phi_\beta}^{weak}(\Omega))$.

Po vynásobení (4.13) s $h = h_i$ výrazem $b'(\rho_{h_i})$ a odečtení rovnice pro $i = 1$ od rovnice pro $i = 2$ dostaneme

$$\left| \int_\Omega (b(\rho_{h_1}(x,t)) - b(\rho_{h_2}(x,t))\phi(x)\ dx \right| \leq$$

$$\int_\Omega |(b(\rho_{h_1}(x,0)) - b(\rho_{h_2}(x,0))\phi(x)|\ dx$$

$$+ \int_0^T \int_\Omega |(b(\rho_{h_1}(x,t)) - b(\rho_{h_2}(x,t))\mathbf{u}(x,t) \cdot \nabla\phi(x)|\ dxdt$$

$$+ \int_0^T \int_\Omega |(\rho_{h_1} b'(\rho_{h_1}) - \rho_{h_2} b'(\rho_{h_2}) + b(\rho_{h_1}) - b(\rho_{h_2}))\phi(x) \mathrm{div}\,\mathbf{u}|\ dxdt$$

$$+ \int_0^T \int_\Omega |r_{h_1} - r_{h_2}|\ dxdt.$$

Odtud dostáváme stejnoměrnou konvergenci

$$\int_\Omega b(\rho_h(x,t))\phi(x)\ dx \to \int_\Omega b(\rho(x,t))\phi(x)\ dx$$

v prostoru $C(0,T)$. □

Poznámka 4.3 [24] Nechť $\zeta \in W^1 L_M(\Omega)$. Pak ze slabé formulace rovnice kontinuity dostáváme

$$\int_\Omega (R_\epsilon(\theta(\rho(s))))_t \zeta\ dx = \frac{1}{\epsilon} \int_\Omega \int_0^\infty \phi_0' \left(\frac{s-\tau}{\epsilon} \right) \theta(\rho(\tau))\zeta\ d\tau dx$$

$$= \int_\Omega (R_\epsilon(\theta(\rho)\mathbf{u})) \cdot \nabla\zeta\ dx - \int_\Omega R_\epsilon((\rho\theta'(\rho) - \theta(\rho))\mathrm{div}\,\mathbf{u})\zeta\ dx$$

$$+ \frac{1}{\epsilon} \phi_0 \left(\frac{s}{\epsilon} \right) \int_\Omega \rho_0 \zeta\ dx,\ s > 0.$$

Operátor R_ϵ je definovaný takto

$$(R_\epsilon v(t)) := \int_{-\infty}^\infty \phi_\epsilon(t-s) v(s)\ ds := \frac{1}{\epsilon} \int_{-\infty}^\infty \phi_0 \left(\frac{t-s}{\epsilon} \right) v(s)\ ds,$$

kde *supp* $\phi_0 \subset (-1,1)$, $\int_{-\infty}^\infty \phi_0(s)\ ds = 1$, $\phi_0 \geq 0$ a $\phi_0 \in C^\infty(\mathbb{R})$.

4.1.3 Faedo-Galerkinova aproximace

Nejdříve budeme zkoumat řešitelnost následujícího systému rovnic

$$\rho_t + \mathrm{div}\,(\rho\mathbf{u}) = \epsilon\Delta\rho, \tag{4.17}$$

$$(\rho\mathbf{u})_t + \mathrm{div}\,(\rho\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}) + \nabla\rho - \mathrm{div}\,P(\mathbf{u}) + \epsilon\nabla\rho\nabla\mathbf{u} = \rho\mathbf{f}, \tag{4.18}$$

kde ϵ je kladné, pevně zvolené číslo. Systém (4.17)–(4.18) doplníme okrajovými podmínkami

$$\nabla\rho\cdot\mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0,\ \ \mathbf{u}|_{\partial\Omega} = 0, \tag{4.19}$$

kde $\mathbf{n}$ je vnější normála oblasti Ω, a počáteční stav předepíšeme takto

$$\rho|_{t=0} = \rho_0 \in C^{2+\mu}(\overline{\Omega}),\ \ \mu > 0,\ \ \rho_0 > 0 \text{ v } \overline{\Omega}, \tag{4.20}$$

$$(\rho\mathbf{u})|_{t=0} = \mathbf{q}_0 \in C^2(\overline{\Omega}). \tag{4.21}$$

4.1.4 Řešitelnost úlohy (4.17), (4.19), (4.20)

Tvrzení 4.4 [7] *Nechť* $\mathbf{u} \in C([0,T];C^2(\overline{\Omega})^N)$ *a* ρ_0 *je pevně zvolená funkce splňující podmínku* (4.20) *a nechť* Ω *je třídy* $C^{2+\mu}$. *Pak existuje zobrazení*

$$\mathcal{S} : C([0,T];C^2(\overline{\Omega})^N) \mapsto C([0,T];C^{2+\mu}(\overline{\Omega}))$$

s následujícími vlastnostmi:

- $\rho = \mathcal{S}(\mathbf{u})$ *je jediné klasické řešení úlohy* (4.17), (4.19), (4.20);
- $$[\inf_{\xi\in\Omega}\rho_0(\xi)]e^{-\int_0^t \|\mathrm{div}\,\mathbf{u}(s)\|_\infty\ ds} \le \mathcal{S}(\mathbf{u})(x,t) \le [\sup_{\xi\in\Omega}\rho_0(\xi)]e^{\int_0^t \|\mathrm{div}\,\mathbf{u}(s)\|_\infty\ ds} \tag{4.22}$$

  pro všechna $t \in [0,T]$ *a* $x \in \Omega$;
- $$\max_{t\in[0,T]}\|\mathcal{S}(\mathbf{u})(t)\|_{1,2} + \|\mathcal{S}(\mathbf{u})\|_{L^1(0,T;W^{2,2}(\Omega))} \le c(T,\epsilon,\rho_0,\|\nabla\mathbf{u}\|_\infty); \tag{4.23}$$
- $$\|\mathcal{S}(\mathbf{u}_1) - \mathcal{S}(\mathbf{u}_2)\|_{C([0,T];W^{1,2}(\Omega))} \le Tc(\kappa)\|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_{C([0,T];W_0^{1,2}(\Omega))} \tag{4.24}$$

  pro libovolné funkce $\mathbf{u}_1$ *a* $\mathbf{u}_2$ *takové, že* $\mathbf{u}_i \in M_\kappa \cap C([0,T];C^2(\overline{\Omega})^N)$.

4.1.5 Faedo-Galerkinovo aproximační schéma

Nyní použijeme Faedo-Galerkinovo aproximační schéma k důkazu řešitelnosti rovnice (4.18). Vezmeme vlastní funkce ψ_n Laplaceova operátoru v oblasti Ω definované úlohou

$$-\Delta\psi_n = \lambda_n\psi_n,\ \psi_n|_{\partial\Omega} = 0.$$

Posloupnost funkcí $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ tvoří ortonormální bázi prostoru $L^2(\Omega)$. Tyto funkce jsou navíc navzájem kolmé v prostoru $W_0^{1,2}(\Omega)$ a platí, že

$$\psi_n \in C^2(\overline{\Omega}) \cap C^{\infty}(\Omega).$$

Definujme konečně dimenzionální prostor

$$X_n = [span\{\psi_j\}_{j=1}^{n}]^N.$$

Nyní hledáme funkci $\mathbf{u}_n \in C([0,T];X_n)$, která je řešením rovnice

$$\int_\Omega \rho_n(t)\mathbf{u}_n(t)\cdot\psi\ dx - \int_\Omega \mathbf{q}_0\cdot\psi\ dx = \int_0^t\int_\Omega [\mathrm{div}\, P(\mathbf{u}_n)$$

$$-\mathrm{div}\,(\rho_n\mathbf{u}_n\otimes\mathbf{u}_n) - \nabla\rho_n - \epsilon\nabla\rho_n\nabla\mathbf{u}_n + \rho_n\mathbf{f}]\psi\ dxds \tag{4.25}$$

pro každé $t \in [0,T]$, libovolnou funkci $\psi \in X_n$ a pro $\rho_n(t) = \mathcal{S}(\mathbf{u}_n(t))$.

Definujme množinu operátorů

$$\mathcal{M}[\rho] : X_n \mapsto X_n',\ \langle\mathcal{M}[\rho]\mathbf{v},\mathbf{w}\rangle = \int_\Omega \rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}\ dx,\ (\rho\in L^1(\Omega),\ \rho\geq\eta>0).$$

Tyto operátory jsou lineární a invertovatelné díky kladnosti funkce ρ v oblasti Ω a tedy platí odhad

$$\|\mathcal{M}^{-1}[\rho]\|_{\mathcal{L}(X_n',X_n)} \leq (\inf_{x\in\Omega}\rho(x))^{-1}.$$

Navíc operátory $\mathcal{M}^{-1}[\rho]$ splňují identitu

$$\mathcal{M}^{-1}[\rho_1] - \mathcal{M}^{-1}[\rho_2] = \mathcal{M}^{-1}[\rho_2]\,(\mathcal{M}[\rho_2] - \mathcal{M}[\rho_1])\,\mathcal{M}^{-1}[\rho_1].$$

Odtud vyplývá, že zobrazení, které zobrazuje prostor $L^1(\Omega)$ do prostoru $\mathcal{L}(X_n', X_n)$, dané předpisem

$$\rho \mapsto \mathcal{M}^{-1}[\rho]$$

je dobře definováno a splňuje nerovnost

$$\|\mathcal{M}^{-1}[\rho_1] - \mathcal{M}^{-1}[\rho_2]\|_{\mathcal{L}(X_n', X_n)} \leq c(\eta, \kappa)\|\rho_1 - \rho_2\|_1 \tag{4.26}$$

pro libovolné funkce ρ_1 a ρ_2 z množiny

$$N_\eta = \{\rho \in L^1(\Omega);\ \inf_{x\in\Omega} \rho(x) \geq \eta > 0\}.$$

Konstanta $c(\eta, \kappa)$ má tvar $c(\eta, \kappa) = \frac{1}{\eta^2} e^{2T\kappa}$, jestliže $\rho = \mathcal{S}(\mathbf{v})$ pro $\mathbf{v} \in M_\kappa$ (viz. odhad (4.22)). Použitím operátoru $\mathcal{M}$ můžeme identitu (4.25) přeformulovat následujícím způsobem

$$\mathbf{u}_n(t) = \mathcal{M}^{-1}[\rho_n] \left(\mathbf{q}_0^* + \int_0^t \mathcal{N}[\rho_n(s), \mathbf{u}_n(s)]\ ds \right), \tag{4.27}$$

kde

$$\langle \mathbf{q}_0^*, \psi \rangle = \int_\Omega \mathbf{q}_0 \psi\ dx$$

a

$$\langle \mathcal{N}[\rho_n, \mathbf{u}_n], \psi \rangle =$$

$$\int_\Omega [\operatorname{div} P(\mathbf{u}_n) - \operatorname{div} (\rho_n \mathbf{u}_n \otimes \mathbf{u}_n) - \nabla \rho_n - \epsilon \nabla \rho_n \nabla \mathbf{u}_n + \rho_n \mathbf{f}]\, \psi\ dx$$

pro každou funkci $\psi \in X_n$.

Lemma 4.5 *Nechť $\mathbf{f} \in \widetilde{L}_{\Psi_{\beta/q}}(Q_T)$ pro nějaké $q > 1$ a $\beta > 2$. Pak existuje řešení $\mathbf{u}_n \in C([0,T]; X_n)$ úlohy (4.25) takové, že*

$$\rho_n = \mathcal{S}(\mathbf{u}_n) \in C([0,T]; C^{2+\mu}(\overline{\Omega})) \text{ pro } \mu > 0 \text{ a každé } n \in \mathbb{N}$$

a toto řešení splňuje následující odhady

$$\max_{t\in[0,T]} \|\rho_n(t)\|_{\Phi_\gamma} \leq c(\rho_0, \mathbf{q}_0, \gamma),\ \ \forall \gamma > 1, \tag{4.28}$$

$$\int_0^T \int_\Omega M(D\mathbf{u}_n)\ dxdt \leq c(\rho_0, \mathbf{q}_0), \tag{4.29}$$

$$\max_{t\in[0,T]} \|\sqrt{\rho_n}\mathbf{u}_n(t)\|_2^2 \leq c(\rho_0, \mathbf{q}_0), \tag{4.30}$$

$$\epsilon \int_0^T \int_\Omega \frac{|\nabla \rho_n|^2}{\rho_n}\ dxdt \leq c(\rho_0, \mathbf{q}_0), \tag{4.31}$$

$$\epsilon \int_0^T \int_\Omega \Phi_\gamma''(\rho_n)|\nabla \rho_n|^2\ dxdt \leq c(\rho_0, \mathbf{q}_0, \gamma). \tag{4.32}$$

Všechny výše uvedené odhady nezávisí na n a funkce ρ_n, $\mathbf{u}_n$ navíc splňují energetickou identitu ve tvaru

$$E[\rho_n, \mathbf{u}_n](t) + \int_0^t \int_\Omega P(\mathbf{u}_n) : D\mathbf{u}_n \; dxds + \epsilon \int_0^t \int_\Omega \frac{|\nabla \rho_n|^2}{\rho_n} \; dxds$$

$$= \int_0^t \int_\Omega \rho_n \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}_n \; dxds + E[\rho_0, \mathbf{q}_0] \tag{4.33}$$

pro každé $t \in [0,T]$, kde

$$E[\rho_n, \mathbf{u}_n](t) := \int_\Omega \left(\frac{1}{2} \rho_n(t) |\mathbf{u}_n(t)|^2 + \rho_n(t) \ln \rho_n(t) \right) \; dx$$

a

$$E[\rho_0, \mathbf{q}_0] := \int_\Omega \left(\frac{1}{2} \frac{|\mathbf{q}_0|^2}{\rho_0} + \rho_0 \ln \rho_0 \right) \; dx.$$

D ů k a z: Na základě (4.27) definujme operátor $\mathcal{T}$, $\mathcal{T} : X_n \mapsto X_n$, tímto způsobem:

$$\mathcal{T}(\mathbf{v}_n)(t) = \mathcal{M}^{-1}[\mathcal{S}(\mathbf{v}_n(t))] \left(\mathbf{q}_0^* + \int_0^t \mathcal{N}[\mathcal{S}(\mathbf{v}_n(s)), \mathbf{v}_n(s)] \; ds \right). \tag{4.34}$$

Nejdříve ukážeme, že operátor $\mathcal{T}$ zobrazuje $C([0, T(n,\kappa)]; X_n)$ do prostoru $C([0, T(n,\kappa)]; X_n)$ pro dostatečně malý čas $T(n,\kappa)$ a současně, že se jedná na tomto intervalu o kontraktivní operátor na množině $X_n \cap M_\kappa$. Mějme pevné funkce ρ_0 a $\mathbf{q}_0$, které splňují podmínky (4.19)–(4.21), a libovolnou ale pevnou konstantu $\tilde{\eta} > 0$ takovou, že $\rho_0(x) \geq \tilde{\eta}$ pro libovolné $x \in \Omega$. Pak platí následující odhad

$$\|\mathcal{T}(\mathbf{v}_n)(t)\|_{X_n} \leq \frac{e^{T\kappa}}{\tilde{\eta}} \left(\|\mathbf{q}_0^*\|_{X_n'} + \delta(T) c(\kappa) \right)$$

pro $t \in [0,T]$, libovolnou funkci $\mathbf{v}_n \in C([0,T]; M_\kappa \cap X_n)$ a $\delta(T)$ takové, že $\delta(T) \to 0$ pro $T \to 0$. Při odvození odhadu postupujeme tak, že nejdříve na základě definice (4.34) operátoru $\mathcal{T}$ získáme nerovnost

$$\|\mathcal{T}(\mathbf{v}_n)(t)\|_{X_n} \leq \|\mathcal{M}^{-1}[\mathcal{S}(\mathbf{v}_n(t))]\|_{\mathcal{L}(X_n', X_n)} \times$$

$$\left\| \mathbf{q}_0^* + \int_0^t \mathcal{N}[\mathcal{S}(\mathbf{v}_n(s)), \mathbf{v}_n(s)] \; ds \right\|_{X_n'}$$

a integrál $\int_0^t \langle \mathcal{N}[\mathcal{S}(\mathbf{v}_n(s)), \mathbf{v}_n(s)], \psi\rangle \, ds$ odhadneme pomocí odhadů jednotlivých integrálů, které ho tvoří. Tedy

$$\left| \int_0^t \int_\Omega \operatorname{div} P(\mathbf{v}_n)\psi \; dxds \right| \le \|\nabla\psi\|_\infty \int_0^t \int_\Omega |P(\mathbf{v}_n)| \; dxds \le Tc(\kappa)\|\nabla\psi\|_\infty$$

viz. (4.8),

$$\left| \epsilon \int_0^t \int_\Omega \nabla\mathcal{S}(\mathbf{v}_n)\nabla\mathbf{v}_n\psi \, dxds \right| \le T\epsilon\kappa\|\psi\|_\infty \|\nabla\mathcal{S}(\mathbf{v}_n)\|_{L^\infty(0,T;L^1(\Omega))}$$
$$\le T\|\psi\|_\infty c(T, \epsilon, \Omega, \rho_0, \kappa)$$

viz. (4.23),

$$\left| \int_0^t \int_\Omega \operatorname{div} (\mathcal{S}(\mathbf{v}_n)\mathbf{v}_n \otimes \mathbf{v}_n)\psi \; dxds \right| \le Tc\kappa^2 \|\nabla\psi\|_\infty \int_\Omega \rho_0 \; dx,$$

$$\left| \int_0^t \int_\Omega \nabla\mathcal{S}(\mathbf{v}_n) \cdot \psi \; dxds \right| \le T\|\nabla\psi\|_\infty \int_\Omega \rho_0 \; dx$$

a konečně

$$\left| \int_0^t \int_\Omega \mathcal{S}(\mathbf{v}_n)\mathbf{f}\psi \; dxds \right|$$
$$\le c\delta(T)\|\mathbf{f}\|_{\Psi_\beta, Q_T} \|\psi\|_\infty \|\mathcal{S}(\mathbf{v}_n)\|_{L^\infty(0,T;L_{\Phi_\beta}(\Omega))} \le \delta(T)c(T, \epsilon, \Omega, \rho_0, \kappa).$$

Položíme-li $T = T(n, \kappa)$ pro $T(n, \kappa)$ dostatečně malé, pak platí nerovnost

$$\|\mathcal{T}(\mathbf{v}_n)(t)\|_{X_n} \le \frac{e^{T(n,\kappa)\kappa}}{\tilde{\eta}} \left(\|\mathbf{q}_0^*\|_{X_n'} + \delta(T(n, \kappa))c(\kappa) \right) \le \kappa$$

pro každé $t \in [0, T(n, \kappa)]$.

Nyní ověříme kontraktivnost. Z následujících odhadů bude zřejmé, že obdobným způsobem by se dokázala i spojitost. Výše zmíněná kontraktivnost je důsledkem nerovností (4.9), (4.24) a (4.26), které nám umožňují odvodit následující odhad

$$\|\mathcal{T}(\mathbf{v}_n^1)(t) - \mathcal{T}(\mathbf{v}_n^2)(t)\|_{X_n} =$$
$$\left\| \mathcal{M}^{-1}[\mathcal{S}(\mathbf{v}_n^1(t))] \left(\mathbf{q}_0^* + \int_0^t \mathcal{N}[\mathcal{S}(\mathbf{v}_n^1(s)), \mathbf{v}_n^1(s)] \; ds \right) \right.$$
$$\left. -\mathcal{M}^{-1}[\mathcal{S}(\mathbf{v}_n^2(t))] \left(\mathbf{q}_0^* + \int_0^t \mathcal{N}[\mathcal{S}(\mathbf{v}_n^2(s)), \mathbf{v}_n^2(s)] \; ds \right) \right\|_{X_n}$$

$$\leq \left\|\mathcal{M}^{-1}[\mathcal{S}(\mathbf{v}_n^1(t))] - \mathcal{M}^{-1}[\mathcal{S}(\mathbf{v}_n^2(t))]\right\|_{\mathcal{L}(X_n',X_n)} \Big(\|\mathbf{q}_0\|_{X_n'} + \delta(T(n,\kappa))c(\kappa)\Big)$$

$$+\left\|\mathcal{M}^{-1}[\mathcal{S}(\mathbf{v}_n^2(t))]\right\|_{\mathcal{L}(X_n',X_n)} \delta(T(n,\kappa))c(\kappa)\|\mathbf{v}_n^1 - \mathbf{v}_n^2\|_{1,2}$$

$$\leq \delta(T(n,\kappa))c(\kappa)e^{T(n,\kappa)\kappa}\|\mathbf{v}_n^1 - \mathbf{v}_n^2\|_{1,2}. \tag{4.35}$$

Pak podle Banachovy věty o pevném bodě existuje jediné řešení rovnice (4.25) pro $t \in [0, T(n,\kappa)]$.

Předpokládejme na okamžik, že funkce $\mathbf{u}_n$ řeší rovnici (4.25) na intervalu $[0,T]$ a $\rho_n = \mathcal{S}(\mathbf{u}_n)$. V rovnici (4.25) zvolíme $\psi = \mathbf{u}_n(t)$, což vede po úpravě s pomocí rovnice kontinuity testované funkcí $\frac{|\mathbf{u}_n|^2}{2}$ na identitu

$$\int_\Omega \frac{1}{2}\rho_n|\mathbf{u}_n|^2\, dx + \int_0^t\int_\Omega P(\mathbf{u}_n) : D\mathbf{u}_n\, dxds$$

$$-\int_0^t\int_\Omega \rho_n \operatorname{div}\mathbf{u}_n\, dxds = \int_0^t\int_\Omega \rho_n\mathbf{f}\cdot\mathbf{u}_n\, dxds + \int_\Omega \frac{1}{2}\frac{|\mathbf{q}_0|^2}{\rho_0}\, dx. \tag{4.36}$$

Z klasické teorie parabolických rovnic (viz. [17]) lze odvodit, že funkce $\frac{d}{dt}\rho_n$ a $\Delta\rho_n$ náleží do prostoru $L^{r_1}(Q_T)$ pro nějaké $r_1 > 1$. Rovnici kontinuity pak přepíšeme na tvar (po přenásobení funkcí $\theta_k'(\rho_n(t))$)

$$\int_\Omega \theta_k(\rho_n(t))\, dx - \int_\Omega \theta_k(\rho_0)\, dx + \int_0^t\int_\Omega (\rho_n\theta_k'(\rho_n) - \theta(\rho_n))\operatorname{div}\mathbf{u}_n\, dxds$$

$$= -\epsilon\int_0^t\int_\Omega |\nabla\rho_n|^2\theta_k''(\rho_n)\, dxds, \tag{4.37}$$

kde $\theta_k(z) \uparrow z\ln z$ pro $k \to \infty$. Odtud a z (4.36) pak už snadno plyne energetická identita (4.33).

Po otestování rovnice (4.17) s $\mathbf{u} = \mathbf{u}_n$ a $\rho = \rho_n$ funkcí $\Phi_\gamma'(\rho_n)$ dostaneme

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \Phi_\gamma(\rho_n(t))\, dx + \epsilon\int_\Omega |\nabla\rho_n(t)|^2\Phi_\gamma''(\rho_n(t))\, dx$$

$$= \int_\Omega (\Phi_\gamma(\rho_n(t)) - \rho_n\Phi_\gamma'(\rho_n(t)))\operatorname{div}\mathbf{u}_n(t)\, dx$$

$$\leq \int_\Omega M(\operatorname{div}\mathbf{u}_n(t))\, dx + c + \int_\Omega \Phi_\gamma(\rho_n(t))\, dx.$$

Při odvození tohoto odhadu jsme použili nerovnost $\Phi_1(z\Phi'_\gamma(z) - \Phi_\gamma(z)) \leq \Phi_\gamma(z) + c$, která platí pro všechna $z \geq 0$ a $\gamma > 1$. Z Gronwallova lemma pak vyplývá, že

$$\max_{t\in[0,T]} \int_\Omega \Phi_\gamma(\rho_n(t))\ dx \leq c_1(T)\biggl(\int_\Omega \Phi_\gamma(\rho_0)\ dx +$$

$$K + \int_0^T \int_\Omega M(D\mathbf{u}_n)\ dxdt\biggr). \tag{4.38}$$

Nyní zkoumejme pravou stranu energetické rovnosti:

$$\left|\int_0^T \int_\Omega \rho_n \mathbf{u}_n \cdot \mathbf{f}\ dxdt\right| \leq c_1(p) \int_0^T \int_\Omega \rho_n |\mathbf{u}_n|^p\ dxdt$$

$$+c_2(p) \int_0^T \int_\Omega \rho_n |\mathbf{f}|^{p'}\ dxdt \leq c_1(p) \int_\Omega \rho_0\ dx \int_0^T \|\mathbf{u}_n(t)\|_\infty^p\ dt$$

$$+Tc_3(p) \max_{t\in[0,T]} \int_\Omega \Phi_\beta(\rho_n(t))\ dx + c_4(p) \int_0^T \int_\Omega \Psi_\beta(c_5(p)|\mathbf{f}|^{p'})\ dxdt$$

$$\leq c_6(p,\rho_0) \int_0^T \int_\Omega M(D\mathbf{u}_n)\ dxdt + Tc_3(p) \max_{t\in[0,T]} \int_\Omega \Phi_\beta(\rho_n(t))\ dx$$

$$+K(T,p,\rho_0,q) + c_5(p) \int_0^T \int_\Omega \Psi_\beta(|\mathbf{f}|^{p'r})\ dxdt, \tag{4.39}$$

kde $p'r = q$ a c_i, $i = 1,\dots,6$, jsou vhodně zvolené konstanty takové, že c_3 a c_6 jsou dostatečně malé. Pro odhad funkce $\mathbf{f}$ jsme při posledním kroku použili konvexitu Ψ_β spolu s Youngovou nerovností $ab \leq a^p/p + b^{p'}/p'$, kde $p \in (1,\infty)$ a $1/p + 1/p' = 1$. Nerovnost (4.39) spolu s odhadem (4.38) a energetickou identitou nám umožňuje odvodit odhad pro posloupnost funkcí $\mathbf{u}_n$, který je stejnoměrný v prostoru Y. Odtud a z (4.6) vyplývá, že

$$\int_0^T \int_\Omega M(D\mathbf{u}_n)\ dxdt \leq c(\rho_0, \mathbf{q}_0). \tag{4.40}$$

Poněvadž dimenze prostoru X_n je konečná, vyplývá z (4.22) existence konstanty $\eta = \eta(n, \rho_0, \mathbf{q}_0)$ takové, že

$$0 < \eta(n) \leq \rho_n(x,t) \leq \frac{1}{\eta(n)} \text{ pro všechna } t \in [0,T] \text{ a } x \in \Omega. \tag{4.41}$$

Odhady (4.30) a (4.31) pak dostaneme ihned z energetické identity a z odhadů (4.38) a (4.39). Z (4.30) a z (4.41) dohromady s konečnou dimenzí prostoru X_n (tedy z ekvivalence všech norem nad konečně dimenzionálními prostory) vyplývá

$$\int_0^T \|\mathbf{u}_n(t)\|_\infty + \|\nabla \mathbf{u}_n(t)\|_\infty \; dt \le c(n, \rho_0, q_0). \tag{4.42}$$

Analogicky

$$\|\rho_n \mathbf{u}_n\|_{X_n'} \le c(n) \int_\Omega \rho_n |\mathbf{u}_n| \; dx \le C(\rho_0, n).$$

Nyní se vraťme k důkazu existence řešení. V dalším kroku předepíšeme počáteční podmínku tímto způsobem

$$\rho(x,0) = \rho(x, T(n,\kappa)) \text{ a } (\rho_n \mathbf{u}_n)(x,0) = (\rho \mathbf{u})(x, T(n,\kappa)).$$

Pak stejným postupem pro dostatečně velké κ s použitím odhadů (4.41) a (4.42) odvodíme odhady

$$\begin{aligned} \|\mathcal{T}(\mathbf{v}_n)(t)\|_{X_n} \; &\le \frac{e^{2(T(n,\kappa)c(n,\rho_0,q_0)+(T_1(n,\kappa)-T(n,\kappa))\kappa)}}{\tilde{\eta}^2} \\ &\quad \times (C(\rho_0, n) + \delta(T_1(n,\kappa) - T(n,\kappa))c(\kappa)) \end{aligned} \tag{4.43}$$

a

$$\begin{gathered} \|\mathcal{T}(\mathbf{v}_n^1)(t) - \mathcal{T}(\mathbf{v}_n^2)(t)\|_{X_n} \le \\ \delta(T_1(n,\kappa) - T(n,\kappa))c(\kappa) e^{T(n,\kappa)c(n,\rho_0,q_0)+(T_1(n,\kappa)-T(n,\kappa))\kappa} \|\mathbf{v}_n^1 - \mathbf{v}_n^2\|_{1,2} \end{gathered} \tag{4.44}$$

pro $t \in [T(n,\kappa), T_2(n,\kappa)]$, kde $T_2(n,\kappa) := T(n,\kappa) + T_1(n,\kappa)$. Tedy operátor $\mathcal{T}$ je opět kontraktivní zobrazení z $C([T(n,\kappa), T_2(n,\kappa)]; X_n)$ do prostoru $C([T(n,\kappa), T_2(n,\kappa)]; X_n)$. Opakujeme-li tento postup, potom po konečně mnoha krocích dokážeme existenci řešení rovnice (4.25) na intervalu $[0, T]$. $\square$

Důkaz následujícího lemma je proveden za předpokladu, že $N = 3$. V kapitole 5.1.6 ukážeme, že toto lemma platí i pro ostatní dimenze.

Lemma 4.6 *Nechť* Ω *je omezená oblast třídy* $C^{2+\mu}$. *Dále předpokládejme, že funkce* ρ_0 *a* $\mathbf{q}_0$ *splňují podmínky* (4.20) *a* (4.21). *Nechť* $\mathbf{f} \in \widetilde{L}_{\Psi_{\beta/q}}(Q_T)$ *pro nějaká* $\beta > 2$ *a* $q > 1$. *Pak existuje slabé řešení* $(\rho, \mathbf{u})$ *úlohy* (4.17)–(4.21) *takové, že*

$$\mathbf{u} \in Y \;\text{ a }\; \rho \in L^\infty(0,T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T; W^{1,2}(\Omega)).$$

Toto řešení navíc vyhovuje následujícím odhadům

$$\|\rho\|_{L^\infty(0,T;L_{\Phi_\gamma}(\Omega))} \leq c(\rho_0, q_0, \gamma), \ \forall \gamma \geq 1, \tag{4.45}$$

$$\int_0^T \int_\Omega M(D\mathbf{u}) \ dxdt \leq c(\rho_0, \mathbf{q}_0), \tag{4.46}$$

$$\|\sqrt{\rho}\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq c(\rho_0, \mathbf{q}_0), \tag{4.47}$$

$$\epsilon \int_0^T \int_\Omega \frac{(2\delta + \rho)|\nabla \rho|^2}{(\delta + \rho)^2} \ dxdt \leq c(\rho_0, \mathbf{q}_0), \tag{4.48}$$

kde konstanty na pravých stranách jsou nezávislé na ϵ a δ, kde $\delta \in (0,1)$ je libovolná, ale pevně zvolená konstanta. Počáteční podmínka (4.20) *je splněna ve smyslu prostoru $C([0,T]; L^q(\Omega))$, $q < \frac{2N}{N-2}$, a počáteční podmínka* (4.21) *v $C([0,T]; W^{-1}L_{\Phi_\beta}(\Omega)^N)$. Řešení splňuje energetickou nerovnost*

$$E[\rho, \mathbf{u}, \delta](t) + (1-\delta) \int_0^t \int_\Omega P(\mathbf{u}) : D\mathbf{u} \ dxds + \epsilon \int_0^t \int_\Omega \frac{(2\delta + \rho)|\nabla \rho|^2}{(\delta + \rho)^2} \ dxds$$

$$\leq \int_0^t \int_\Omega \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \ dxds + E[\rho_0, \mathbf{q}_0, \delta] + c(Q_T)\delta \tag{4.49}$$

pro s.v. $t \in [0,T]$, kde

$$E[\rho, \mathbf{u}, \delta](t) := \int_\Omega \left(\frac{1}{2} \rho(t) |\mathbf{u}(t)|^2 + \rho(t) \ln\left(\rho(t) + \delta\right) \right) \ dx$$

a

$$E[\rho_0, \mathbf{q}_0, \delta] := \int_\Omega \left(\frac{1}{2} \frac{|\mathbf{q}_0|^2}{\rho_0} + \rho_0 \ln\left(\rho_0 + \delta\right) \right) \ dx.$$

Navíc existuje $r_1 > 1$ takové, že

$$\rho_t, \ \Delta\rho \in L^{r_1}(Q_T), \tag{4.50}$$

a rovnice (4.17) *je splněna ve smyslu skoro všude na Q_T.*

D ů k a z: Do nerovnosti (viz. [11])

$$\|h\|_q \leq c\left(\|h\|_1 + m\|\nabla h\|_m^\alpha \|h\|_r^{(1-\alpha)}\right), \tag{4.51}$$

kde $\alpha = (1/r - 1/q)(1/r - 1/m + 1/N)^{-1} < 1$, dosadíme $h = \sqrt{\rho_n}$, $q = 5$, $m = 2$, $r = 2$, $N = 3$ a $\alpha = \frac{9}{10}$. Odtud a z (4.31) lze odvodit stejnoměrnou omezenost funkcí ρ_n v $L^{\frac{10}{9}}(0,T;L^{5/2}(\Omega))$. Po přenásobení rovnice (4.17) funkcí ρ_n a integraci dostaneme

$$\|\rho_n(t)\|_2^2 + 2\epsilon \int_0^t \|\nabla \rho_n(s)\|_2^2 \, ds = -2 \int_0^t \int_\Omega \operatorname{div} \mathbf{u}_n |\rho_n|^2 \, dxds + \|\rho(0)\|_2^2.$$

Nyní s použitím (4.29) a Youngovy nerovnosti dostáváme, že

$$\begin{aligned}
\left| 2 \int_0^t \int_\Omega \operatorname{div} \mathbf{u}_n |\rho_n|^2 \, dxds \right| &\le c + \frac{9}{10} \int_0^t \int_\Omega |\rho_n|^{\frac{10}{9}} |\rho_n|^{\frac{10}{9}} \, dxds \\
&\le c + \frac{9}{10} \int_0^t \left(\int_\Omega |\rho_n|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}\frac{10}{9}} \left(\int_\Omega |\rho_n|^{\frac{5}{2}} \, dx \right)^{\frac{2}{5}\frac{10}{9}} ds \\
&\le c + \frac{9}{10} \|\rho_n\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^{\frac{10}{9}} \|\rho_n\|_{L^{\frac{10}{9}}(0,T;L^{\frac{5}{2}}(\Omega))}^{\frac{10}{9}}
\end{aligned}$$

a tedy zřejmě jsou funkce $\nabla \rho_n$ omezené v $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ a ρ_n v $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ nezávisle na n.

Dále je třeba si uvědomit, že funkce $\frac{d}{dt}\rho_n$ a $\Delta \rho_n$ jsou omezeny nezávisle na n v prostoru $L^{r_1}(Q_T)$ pro nějaké $r_1 > 1$. To je důsledek Lemma 4.5 z [7], jehož důkaz je založen na odhadu členu div $(\rho_n \mathbf{u}_n)$ ve vhodném prostoru a na klasické teorii parabolických rovnic. V našem případě odhadneme člen $\nabla \rho_n \cdot \mathbf{u}_n$ v prostoru $L^{r_2}(0,T;L^2(\Omega))$, pro $r_2 < 2$, a člen $\rho_n \operatorname{div} \mathbf{u}_n$ v $L_M(0,T;L^2(\Omega))$.

Nyní podle Lions-Aubinova lemma $\rho_n \to \rho$ silně v $C([0,T];L^q(\Omega))$ pro $q < \frac{2N}{N-2}$ a slabě v $L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega))$, omezíme-li se na vhodně vybrané podposloupnosti. Dále vidíme, že $D\mathbf{u}_n \overset{\overline{M}}{\rightharpoonup} D\mathbf{u}$ v $L_M(Q_T)^{N\times N}$ a navíc $D\mathbf{u}_n$ jsou omezené a $*$-slabě konvergentní v $L_M(0,T;L_M(\Omega)^{N\times N})$, viz. důkaz Lemma 1.47, kde jsme dokázali, že jestliže $\varphi \in \widetilde{L}_{\Phi_1}(0,T)$ a $\psi \in \widetilde{L}_{\Phi_1}(\Omega)$, tak $\varphi\psi \in \widetilde{L}_{\Phi_1}(Q_T)$. Dále $P(\mathbf{u}_n) \overset{M}{\rightharpoonup} \overline{P}$ v $L_{\overline{M}}(Q_T)^{N\times N}$ a $\rho_n \mathbf{u}_n \to \rho \mathbf{u}$ $*$-slabě v $L_M(0,T;L^r(\Omega)^N)$ pro $r < q$. Poslední konvergence plyne z následujícího odhadu

$$\begin{aligned}
&\left| \int_0^T \phi_1(t) \int_\Omega (\rho_n - \rho) \mathbf{u}_n \phi_2(x) \, dxdt \right| \\
&\le \int_0^T |\phi_1(t)| \|\rho_n(t) - \rho(t)\|_q \|\phi_2\|_{q'} \|\mathbf{u}_n(t)\|_\infty \, dt \\
&\le \|\rho_n - \rho\|_{C(0,T;L^q(\Omega))} \|\phi_2\|_{q'} \|D\mathbf{u}_n\|_{L_M(0,T;L_M(\Omega))} \|\phi_1\|_{\overline{M}}
\end{aligned}$$

a pro druhý integrál

$$\int_0^T \phi_1(t) \int_\Omega \rho(\mathbf{u} - \mathbf{u}_n)\phi_2(x)\ dxdt$$

stačí použít E_M-slabou konvergenci $\mathbf{u}_n$ v $L_M(Q_T)^N$. Omezenost posloupnosti tenzorů $\{\rho_n \mathbf{u}_n \otimes \mathbf{u}_n\}_{n=1}^\infty$ v $L_{\Psi_{2p}}(0,T; L^q(\Omega)^{N\times N})$ pro $q < \frac{2N}{N-2}$ a $p > N$ plyne z odhadu

$$\int_0^T \phi_1(t) \left(\int_\Omega \left(\rho_n |\mathbf{u}_n|^2\right)^q\ dx \right)^{1/q}\ dt \leq c \int_0^T |\phi(t)| \|\mathbf{u}_n(t)\|_\infty^2\ dt$$

$$\leq c \int_0^T |\phi(t)| \|D\mathbf{u}_n(t)\|_p^2\ dt.$$

Nyní ukážeme $*$-slabou konvergenci $\rho_n \mathbf{u}_n \otimes \mathbf{u}_n$ k funkci $\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}$ v prostoru $L_{\Psi_{2p}}(0,T; L^q(\Omega)^{N\times N})$. Nejdříve dokažme stejnoměrnou omezenost $\frac{d}{dt}(\rho_n \mathbf{u}_n)$ v $L_{\Phi_{1/\alpha}}(0,T; W^{-1}L_{\Phi_{1/2}}(\Omega))$, $\alpha > 2$. Ta je ale důsledkem rovnice (4.18). Po otestování funkcí $\phi \in C_0^\infty(0,T)$ a $\psi \in W_0^1 L_{\Psi_{1/2}}(\Omega)$ s použitím Lemma 1.47 stačí odhadnout jen "nejhorší" člen

$$\left| \int_0^T \phi(t) \int_\Omega P(\mathbf{u}_n) : D\psi(x)\ dxdt \right| \leq c \|\psi\|_{1,\Psi_{1/2}} \times$$

$$\|\phi\|_{\Psi_{1/2}} \left(\int_0^T \int_\Omega \overline{M}(P(\mathbf{u}_n))\ dxdt + 1 \right).$$

Zbytek plyne z definice normy v Orliczových prostorech, hustoty $C_0^\infty(0,T)$ v $E_{\Psi_{1/2}}(0,T)$ a z vnoření

$$L_{\Psi_{1/\alpha}}(0,T) \hookrightarrow E_{\Psi_{1/2}}(0,T) \text{ pro } \alpha > 2.$$

Odtud plyne, že $\rho_n \mathbf{u}_n \to \rho \mathbf{u}$ v $C([0,T]; W^{-1}L_{\Phi_\beta}(\Omega)^N)$. To vede ke konvergenci funkcí $\rho_n \mathbf{u}_n \otimes \mathbf{u}_n$ k funkci $\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}$ v prostoru $\mathcal{D}'(Q_T)$ a díky omezenosti ke $*$-slabé konvergenci v $L_{\Psi_{2p}}(0,T; L^q(\Omega))$, kde $q < \frac{2N}{N-2}$ a $p > N$. Nyní jen zopakujme, že v souvislosti s počátečními podmínkami jsme z vět o kompaktním vnoření nad Bochnerovými prostory (viz. [27]) odvodili následující konvergence

$$\rho_n \to \rho \text{ v prostoru } C([0,T]; L^q(\Omega)) \text{ pro } q < \frac{2N}{N-2}, \tag{4.52}$$

$$\rho_n \mathbf{u}_n \to \rho \mathbf{u} \text{ v prostoru } C([0,T]; W^{-1}L_{\Phi_\beta}(\Omega)^N) \tag{4.53}$$

a z omezenosti $\rho_n \mathbf{u}_n$ v $L^\infty(0,T; L_{\beta/2}(\Omega)^N)$ pak plyne, že

$$\rho_n \mathbf{u}_n \to \rho \mathbf{u} \text{ v } C([0,T]; L^{weak}_{\Phi_{\beta/2}}(\Omega)^N). \tag{4.54}$$

Výše zmíněná omezenost plyne z (4.28), (4.30) a z odhadu

$$\int_\Omega \Phi_{\beta/2}(\rho_n \mathbf{u}_n)\, dx = \int_\Omega \ln^{\beta/2}(1+\rho_n|\mathbf{u}_n|)\, dx$$

$$+ \int_\Omega \rho_n |\mathbf{u}_n| \ln^{\beta/2}(1+\rho_n|\mathbf{u}_n|)\, dx \leq c + \int_\Omega \rho_n |\mathbf{u}_n|\, dx + \int_\Omega \rho_n |\mathbf{u}_n|^2 dx$$

$$+ \int_\Omega \rho_n \ln^\beta(1+\rho_n|\mathbf{u}_n|)\, dx \leq c \left(\int_\Omega \Psi_\beta \left(\ln^\beta(\rho_n|\mathbf{u}_n|)\right)\, dx + 1 \right) \leq c.$$

Přenásobením rovnice (4.17) s $\mathbf{u} = \mathbf{u}_n$ a $\rho = \rho_n$ funkcí ρ_n a integrováním per partes dostáváme

$$\|\rho_n(t)\|_2^2 + 2\epsilon \int_0^t \|\nabla \rho_n(s)\|_2^2\, ds = -\int_0^t \int_\Omega \operatorname{div} \mathbf{u}_n |\rho_n|^2\, dxds + \|\rho(0)\|_2^2.$$

Použitím stejného postupu pro limitní stav "$n = \infty$" získáme rovnici

$$\|\rho(t)\|_2^2 + 2\epsilon \int_0^t \|\nabla \rho(s)\|_2^2\, ds = -\int_0^t \int_\Omega \operatorname{div} \mathbf{u} |\rho|^2\, dxds + \|\rho(0)\|_2^2.$$

Odtud díky $E_{\overline{M}}$-slabé konvergenci funkcí $\operatorname{div} \mathbf{u}_n$ v prostoru $L_M(Q_T)$ a silné konvergenci ρ_n v $C(0,T; L^q(\Omega))$ pro $q < \frac{2N}{N-2}$ dostáváme

$$\|\nabla \rho_n\|_{2,Q_T} \to \|\nabla \rho\|_{2,Q_T} \text{ a } \|\rho_n(t)\|_{2,\Omega} \to \|\rho(t)\|_{2,\Omega}$$

pro všechna $t \in [0,T]$, což vede k silné konvergenci funkcí $\nabla \rho_n$ v $L^2(Q_T)$. Odtud plyne

$$\nabla \rho_n \nabla \mathbf{u}_n \to \nabla \rho \nabla \mathbf{u} \text{ v } \mathcal{D}'(Q_T).$$

Důsledkem výše uvedeného postupu je, že $\nabla \rho_n \to \nabla \rho$ a $\rho_n \to \rho$ skoro všude v oblasti Q_T (po přechodu k vybrané podposloupnosti) a tedy

$$\frac{(2\delta + \rho_n)|\nabla \rho_n|^2}{(\rho_n + \delta)^2} \to \frac{(2\delta + \rho)|\nabla \rho|^2}{(\rho + \delta)^2} \text{ s.v. v } Q_T$$

pro $\delta \in (0,1)$ libovolné ale pevné. Použijeme-li nyní Fatouova lemma, dostaneme

$$\liminf_{n\to\infty} \int_0^t \int_\Omega \frac{(2\delta+\rho_n)|\nabla\rho_n|^2}{(\rho_n+\delta)^2}\, dxds \geq \int_0^t \int_\Omega \frac{(2\delta+\rho)|\nabla\rho|^2}{(\rho+\delta)^2}\, dxds$$

pro každé $t \in [0,T]$. Odhad (4.45) je opět důsledek Gronwallova lemma (viz. (4.38)).

Zbývá ve vhodném smyslu ztotožnit tenzor $\overline{P}$ s tenzorem $P(\mathbf{u})$. K důkazu použijeme následující lemma.

Lemma 4.7 *Mějme libovolné funkce ρ a $\mathbf{u}$ splňující rovnice* (4.17)–(4.18) *s tenzorem napětí $\overline{P}$ místo $P(\mathbf{u})$. Nechť*

$$\rho \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega)),$$

$$\mathbf{u} \in Y,\ D\mathbf{u} \in \widetilde{L}_M(Q_T)\ a\ \overline{P} \in L_{\overline{M}}(Q_T)^{N\times N}.$$

Pak tyto funkce splňují ve smyslu distribucí identitu

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \frac{1}{2}\rho|\mathbf{u}|^2\, dx + \int_\Omega \overline{P} : D\mathbf{u}\, dx - \int_\Omega \rho \operatorname{div} \mathbf{u}\, dx = \int_\Omega \rho\mathbf{u}\cdot\mathbf{f}\, dx. \tag{4.55}$$

D ů k a z: Tento důkaz používá myšlenku z [22]. Definujme Steklovovu funkci

$$\mathbf{u}_+^\xi(x,t) := \xi^{-1}\int_t^{t+\xi} \mathbf{u}(x,s)\, ds.$$

Dále označme

$$\psi_-^\xi(x,t) := \xi^{-1}\int_{t-\xi}^{t} \psi(x,s)\, ds.$$

Po otestování rovnice (4.17) funkcí $\frac{|\mathbf{u}_+^\xi|^2}{2}\phi_\eta(s)$ a rovnice (4.18) funkcí $\mathbf{u}_+^\xi\phi_\eta(s)$, kde $\phi \in C_0^1(0,t-\eta)$, $\eta > \xi$, dostáváme

$$\int_0^t \int_\Omega \rho\partial_s\left(\frac{|\mathbf{u}_+^\xi|^2}{2}\phi_\eta(s)\right)\, dxds = -\int_0^t \phi_\eta(s)\int_\Omega \rho(\mathbf{u}\cdot\nabla)\frac{|\mathbf{u}_+^\xi|^2}{2}\, dxds$$

$$+\epsilon\int_0^t \phi_\eta(s)\int_\Omega \nabla\rho\frac{\nabla(|\mathbf{u}_+^\xi|^2)}{2}\, dxds$$

a

$$-\int_0^t \int_\Omega \rho \mathbf{u} \partial_s \left(\mathbf{u}_+^\xi \phi_\eta(s) \right) \; dxds = \int_0^t \phi_\eta(s) \int_\Omega (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) : D\mathbf{u}_+^\xi + \rho \operatorname{div} \mathbf{u}_+^\xi \; dxds$$

$$- \int_0^t \phi_\eta(s) \int_\Omega \overline{P} : D\mathbf{u}_+^\xi - \epsilon (\nabla \rho \nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u}_+^\xi + \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}_+^\xi \; dxds.$$

Sečtením obou identit dostaneme

$$\int_0^t \phi_\eta(s) \int_\Omega \rho \mathbf{u}_+^\xi \cdot \partial_s \mathbf{u}_+^\xi - \rho \mathbf{u} \cdot \partial_s \mathbf{u}_+^\xi \; dxds$$

$$= \int_0^t \int_\Omega \rho (\mathbf{u}_+^\xi \cdot \mathbf{u}) \partial_s \phi_\eta(s) \; dxds - \int_0^t \int_\Omega \rho \frac{|\mathbf{u}_+^\xi|^2}{2} \partial_s \phi_\eta(s) \; dxds$$

$$+ \int_0^t \phi_\eta(s) \int_\Omega \rho \sum_{i,j=1}^N u^j \frac{\partial (u_i)_+^\xi}{\partial x_j} (u_i - (u_i)_+^\xi) \; dxds$$

$$+ \epsilon \int_0^t \phi_\eta(s) \int_\Omega \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j} \rho \frac{\partial}{\partial x_j} ((u_i)_+^\xi - u_i)(u_i)_+^\xi + \rho \operatorname{div} \mathbf{u}_+^\xi \; dxds$$

$$- \int_0^t \phi_\eta(s) \int_\Omega \overline{P} : D\mathbf{u}_+^\xi + \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}_+^\xi \; dxds. \tag{4.56}$$

Zbytek je důsledkem $E_{\overline{M}}$-slabé konvergence $D\mathbf{u}_+^\xi$ k funkci $D\mathbf{u}$ v prostoru $L_M(Q_T)^{N\times N}$ ($\xi \to 0$) a silné konvergence v $E_{\Psi_\gamma}(Q_T)^{N\times N}$ pro $\gamma > 1$, což plyne z Tvrzení 1.27 a z [15, str. 179]. $E_{\overline{M}}$-slabá konvergence plyne po nulovém prodloužení z nerovnosti

$$\left| \int_{Q_t} (D\mathbf{u}_+^\xi - D\mathbf{u}) \psi \; dxds \right| \leq c \|\psi_-^\xi - \psi\|_{\Phi_1} + c(\xi, \psi),$$

neboť Φ_1 splňuje Δ_2-podmínku (viz. [15, str. 179]) a $c(\xi, \psi) \to 0$ pro $\xi \to 0$. Přehození Steklovovy funkce provedeme pomocí Fubiniovy věty a následujícího schématu (bez integrace přes oblast Ω)

$$\frac{1}{\xi} \int_0^t \int_s^{s+\xi} g_1(\tau) g_2(s) \; d\tau ds = \frac{1}{\xi} \int_\xi^{t+\xi} \int_0^s g_1(\tau) g_2(s - \xi) \; d\tau ds$$

$$-\frac{1}{\xi} \int_0^t \int_0^s g_1(\tau) g_2(s) \; d\tau ds = \frac{1}{\xi} \int_\xi^{t+\xi} \int_\tau^{t+\xi} g_1(\tau) g_2(s - \xi) \; ds d\tau$$

$$+\frac{1}{\xi}\int_0^\xi\int_\xi^{t+\xi} g_1(\tau)g_2(s-\xi)\ dsd\tau - \frac{1}{\xi}\int_0^t\int_\tau^t g_1(\tau)g_2(s)\ dsd\tau$$
$$=\frac{1}{\xi}\int_\xi^t\int_{\tau-\xi}^{\tau} g_1(\tau)g_2(s)\ dsd\tau + \frac{1}{\xi}\int_0^\xi\int_0^\tau g_1(\tau)g_2(s)\ dsd\tau$$

za prodloužení nulou vně intervalu $[0,t]$.

Pro důkaz, že integrál

$$\int_0^t \phi_\eta(s)\int_\Omega \rho\partial_s\mathbf{u}_+^\xi\cdot(\mathbf{u}_+^\xi-\mathbf{u})\ dxds$$

konverguje k nule využijeme rozpisu

$$\rho\partial_s\mathbf{u}_+^\xi = \partial_s(\rho\mathbf{u})_+^\xi - \mathbf{u}(s+\xi)\partial_s\rho_+^\xi$$

a následující identity

$$\int_0^t\int_\Omega \partial_s(\rho\mathbf{u})_+^\xi(\phi_\eta(s)\psi(x,s))\ dxds = -\int_0^t\int_\Omega \rho\mathbf{u}\partial_s(\phi_\eta(s)\psi(x,s))_-^\xi\ dxds.$$

Dosadíme $\psi(x,t)=\mathbf{u}_+^\xi(x,t)-\mathbf{u}(x,t)$ a opět využijeme výše zmíněné konvergence Steklovových funkcí a slabé formulace rovnice (4.18). Člen $\mathbf{u}(s+\xi)\partial_s\rho_+^\xi$ můžeme ošetřit stejným způsobem s použitím slabé formulace rovnice (4.17). Pro $\eta\to 0$ pak dostaneme tvrzení našeho lemma. □

Nyní využijeme monotonie operátoru P. Z ní vyplývá nerovnost

$$\liminf_{n\to\infty}\int_0^T \phi_h(s)\int_\Omega P(\mathbf{u}_n):D\mathbf{u}_n\ dxds$$
$$\geq \int_0^T \phi_h(s)\int_\Omega \overline{P}:D\mathbf{v}+P(\mathbf{v}):D\mathbf{u}-P(\mathbf{v}):D\mathbf{v}\ dxds,$$

kde $\phi_h\in C_0^\infty(0,T)$ a $1\geq\phi_h\geq 0$ pro každé h a navíc $\phi_h\uparrow 1$ s.v. na $[0,T]$ pro $h\to\infty$.

Odečtením identit (4.36) a (4.55) dostaneme

$$\int_0^T \phi_h(s)\int_\Omega P(\mathbf{u}_n):D\mathbf{u}_n-\overline{P}:D\mathbf{u}\ dxds$$
$$=\int_0^T \phi_h'(s)\int_\Omega \rho_n\frac{|\mathbf{u}_n|^2}{2}-\rho\frac{|\mathbf{u}|^2}{2}+\rho_n\mathrm{div}\,\mathbf{u}_n-\rho\mathrm{div}\,\mathbf{u}\ dxds$$

$$+\int_\Omega \rho_n \mathbf{f}\cdot \mathbf{u}_n - \rho \mathbf{f}\cdot \mathbf{u}\; dxds.$$

S použitím výše uvedené nerovnosti a všech dříve odvozených konvergencí dostáváme

$$\int_0^T \phi_h \int_\Omega (\overline{P} - P(\mathbf{v})) : (D\mathbf{u} - D\mathbf{v})\; dxds \geq 0,\ \forall h \in (1,\infty). \tag{4.57}$$

Nyní necháme konvergovat h k nekonečnu. Zřejmě lze zaměnit limitu s integrálem. Majorantou je zde funkce

$$g(t) = \left| \int_\Omega (\overline{P}(t) - P(\mathbf{v}(t))) : (D\mathbf{u}(t) - D\mathbf{v}(t))\; dx \right|.$$

Po dosazení $\mathbf{v} = \mathbf{u} - \lambda\psi$ do (4.57), kde $\psi \in C_0^\infty(Q_T)$ a $\lambda \in \mathbb{R}$, můžeme ověřit díky monotonii a vlastnosti 3. tenzoru P, že

$$\operatorname{div} \overline{P} = \operatorname{div} P(\mathbf{u}) \text{ v } L_{\Phi_{1/\alpha}}(0,T; W^{-1}L_{\Phi_{1/2}}(\Omega)^{N\times N}),\ \alpha > 2.$$

Navíc $P(\mathbf{u}) \in L_{\overline{M}}(Q_T)$, což plyne z (4.6), (4.8) a (4.10).

Zopakujeme-li postup z důkazu Lemma 4.7 pro $P(\mathbf{u})$ místo $\overline{P}$, pak dostaneme ve smyslu distribucí identitu

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \frac{1}{2}\rho|\mathbf{u}|^2\; dx + \int_\Omega P(\mathbf{u}) : D\mathbf{u}\; dx - \int_\Omega \rho \operatorname{div} \mathbf{u}\; dx = \int_\Omega \rho \mathbf{u}\cdot \mathbf{f}\; dx. \tag{4.58}$$

Zbývá ověřit energetickou nerovnost (4.49). Z identit (4.36) a (4.37) pro $\theta_k(z) \uparrow z\ln(z+\delta)$, $\delta \in (0,1)$ libovolné ale pevné a pro $k \to \infty$ dostáváme

$$E[\rho_n, \mathbf{u}_n, \delta](t) + \int_0^s \int_\Omega P(\mathbf{u}_n) : D\mathbf{u}_n\; dxdz + \epsilon \int_0^s \int_\Omega \frac{2\delta + \rho_n}{(\delta+\rho_n)^2}|\nabla \rho_n|^2\; dxdz$$

$$\leq \int_0^s \int_\Omega \rho_n \mathbf{f}\cdot \mathbf{u}_n\; dxdz + \int_0^s \int_\Omega \frac{\delta \rho_n}{\rho_n + \delta} \operatorname{div} \mathbf{u}_n\; dxdz + E[\rho_0, \mathbf{q}_0, \delta] \tag{4.59}$$

pro každé $s \in [0,T]$. Tuto identitu integrujeme pomocí integrálu $\frac{1}{\xi}\int_{t-\xi/2}^{t+\xi/2} ds$, kde ξ je zvoleno libovolně ale pevně, a necháme n konvergovat k nekonečnu. Podívejme se blíže jen na funkce $l_n(s) := \int_0^s \int_\Omega P(\mathbf{u}_n) : D\mathbf{u}_n\; dxdz$, neboť pro ostatní členy můžeme použít výše odvozené konvergence. Zřejmě platí, že funkce jsou omezené v $W^{1,1}(0,T)$ a tedy po přechodu k vybrané podposloupnosti konvergují v $L^p(0,T)$ pro nějaké $p > 1$ a s.v. $s \in (0,T)$ k $l(s)$. Navíc víme z (4.10), že

$$l(s) \geq \int_0^s \int_\Omega P(\mathbf{u}) : D\mathbf{u}\ dxdz.$$

Pro $\xi \to 0$ pak pro s.v. $t \in (0,T)$ dostáváme

$$E[\rho,\mathbf{u},\delta](t) + \int_0^t \int_\Omega P(\mathbf{u}) : D\mathbf{u}\ dxds + \epsilon \int_0^t \int_\Omega \frac{2\delta+\rho}{(\delta+\rho)^2} |\nabla\rho|^2\ dxds$$

$$\leq \int_0^t \int_\Omega \rho\mathbf{f}\cdot\mathbf{u}\ dxds + \int_0^t \int_\Omega \frac{\delta\rho}{\rho+\delta} \operatorname{div}\mathbf{u}\ dxds + E[\rho_0,\mathbf{q}_0,\delta].$$

Odtud, z Tvrzení 1.20 a z nerovnosti (4.6) plyne energetická nerovnost (4.49). □

Lemma 4.8 *Nechť* $\mathbf{f} \in \widetilde{L}_{\Psi_{\beta/q}}(Q_T)$ *pro nějaké* $q > 1$ *a* $\beta > 2$. *Pro zadaná počáteční data* ρ_0 *a* $\mathbf{q}_0$ *vyhovující podmínkám* (4.20) *a* (4.21) *existuje řešení úlohy* (4.1), (4.2), (4.20), (4.21) *takové, že*

$$\mathbf{u} \in Y,\ \ \rho \in L^\infty(0,T;L_{\Phi_\beta}(\Omega)).$$

Navíc toto řešení splňuje následující odhady

$$\|\rho\|_{L^\infty(0,T;L_{\Phi_\beta}(\Omega))} \leq c(\rho_0,\mathbf{q}_0), \tag{4.60}$$

$$\int_0^T \int_\Omega M(D\mathbf{u})\ dxdt \leq c(\rho_0,\mathbf{q}_0), \tag{4.61}$$

$$\|\sqrt{\rho}\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq c(\rho_0,\mathbf{q}_0). \tag{4.62}$$

Rovnice

$$\rho_t + \operatorname{div}(\rho\mathbf{u}) = 0 \tag{4.63}$$

a

$$(\rho\mathbf{u})_t + \operatorname{div}(\rho\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}) - \operatorname{div} P(\mathbf{u}) + \nabla\rho = \rho\mathbf{f} \tag{4.64}$$

jsou splněny v prostoru $\mathcal{D}'(Q_T)$. *Řešení naší úlohy vyhovuje počátečním podmínkám* (4.20) *a* (4.21) *v prostoru* $C([0,T];W^{-1}L_{\Phi_\beta}(\Omega))$ *respektive v prostoru* $C([0,T];W^{-1}L_{\Phi_\beta}(\Omega)^N)$.

Toto řešení navíc splňuje identitu ve tvaru

$$\frac{d}{dt}\left(\int_\Omega \frac{1}{2}\rho|\mathbf{u}|^2 + \rho\ln\rho\ dx\right) + \int_\Omega P(\mathbf{u}) : D\mathbf{u}\ dx = \int_\Omega \rho\mathbf{f}\cdot\mathbf{u}\ dx \tag{4.65}$$

a to nad prostorem $\mathcal{D}'(0,T)$ a energetickou nerovnost

$$E[\rho,\mathbf{u}](t) + \int_0^t \int_\Omega P(\mathbf{u}) : D\mathbf{u}\ dxds \le \int_0^t \int_\Omega \rho\mathbf{f}\cdot\mathbf{u}\ dxds + E[\rho_0,\mathbf{q}_0] \tag{4.66}$$

pro s.v. $t \in [0,T]$.

D ů k a z: Označme $(\rho_\epsilon, \mathbf{u}_\epsilon)$ řešení úlohy (4.17)–(4.21) dané Lemmatem 4.6. Z odhadů (4.45), (4.46), (4.48) a z následující nerovnosti

$$\epsilon \int_{Q_T} |\nabla\rho_\epsilon \nabla\mathbf{u}_\epsilon|\ dxdt \le \epsilon \left\| \frac{\sqrt{(2\delta+\rho_\epsilon)}\nabla\rho_\epsilon}{\delta+\rho_\epsilon} \right\|_{2,Q_T} \sqrt{\int_{Q_T} \frac{(\delta+\rho_\epsilon)^2}{2\delta+\rho_\epsilon} |\nabla\mathbf{u}_\epsilon|^2\ dxdt}$$

$$\le c\sqrt{\epsilon}\|\rho_\epsilon\|_{L^\infty(0,T;L_{\Phi_4}(\Omega))} \left(\int_0^T \int_\Omega M(D\mathbf{u}_\epsilon)\ dxdt + 1\right)$$

odvodíme silnou konvergenci

$$\epsilon\nabla\rho_\epsilon\nabla\mathbf{u}_\epsilon \to 0 \text{ v prostoru } L^1(Q_T).$$

Funkce ρ_ϵ jsou stejnoměrně omezené v prostoru $L^\infty(0,T;L_{\Phi_\beta}(\Omega))$ (viz. (4.45)) a jejich časové derivace $\frac{d}{dt}\rho_\epsilon$ v prostoru $L^2(0,T;W^{-1}L_{\Phi_{\beta/2}}(\Omega))$. Tato omezenost vyplývá z rovnice (4.17) a z odhadů

$$\left|\int_0^T \phi_1(t) \int_\Omega \rho_\epsilon\mathbf{u}_\epsilon\cdot\nabla\phi_2(x)\ dxdt\right|$$

$$\le \|\nabla\phi_2\|_{\Psi_\beta}\|\phi_1\|_{\overline{M}}\|\rho_\epsilon\|_{L^\infty(0,T;L_{\Phi_\beta}(\Omega))}\|D\mathbf{u}_\epsilon\|_{L_M(0,T;L_M(\Omega))}$$

a

$$\epsilon\left|\int_0^T \phi_1(t) \int_\Omega \nabla\rho_\epsilon\cdot\nabla\phi_2(x)\ dxdt\right|$$

$$\le \epsilon\|\phi_1\|_2 \left\| \frac{\sqrt{(2\delta+\rho_\epsilon)}\nabla\rho_\epsilon}{\delta+\rho_\epsilon} \right\|_2 \left\| \sqrt{\frac{(\delta+\rho_\epsilon)^2}{2\delta+\rho_\epsilon}}|\nabla\phi_2| \right\|_{L^\infty(0,\infty;L^2(\Omega))}.$$

Z vět o kompaktním vnoření (viz. [27]) pak lze odvodit, že $\rho_\epsilon \to \rho$ silně v $C(0,T;W^{-1}L_{\Phi_{2\beta}}(\Omega))$ a díky omezenosti v $L^\infty(0,T;L_{\Phi_\beta}(\Omega))$ konverguje v $C([0,T];L^{weak}_{\Phi_\beta}(\Omega))$. Silná konvergence funkcí ρ_ϵ dohromady s $E_{\overline{M}}$-slabou konvergencí funkcí $D\mathbf{u}_\epsilon$ v $L_M(Q_T)^{N\times N}$ a $*$-slabou v $L_M(0,T;L_M(\Omega)^{N\times N})$ implikuje, že $\rho_\epsilon\mathbf{u}_\epsilon \to \rho\mathbf{u}$ *-slabě v $L_M(0,T;L_{\Phi_\gamma}(\Omega)^N)$, kde $\beta > \gamma > 2$, neboť z integrálů

$$\int_0^T \phi_1(s)\int_\Omega (\rho_\epsilon - \rho)\mathbf{u}_\epsilon\phi_2(x)\;dxds + \int_0^T \phi_3(s)\int_\Omega \rho(\mathbf{u}_\epsilon - \mathbf{u})\phi_4(x)\;dxds$$

je vidět, že stačí ověřit, že $\rho\phi_4 \in L^\infty(0,T;L_{\overline{M}}(\Omega))$ a omezenost $\mathbf{u}_\epsilon\phi_2$ v $L_{\overline{M}}(0,T;W^1_0L_{\Psi_{2\beta}}(\Omega))$. Zbytek vyplývá z omezenosti $\rho_\epsilon\mathbf{u}_\epsilon$ v $L_M(0,T;L_{\Phi_\beta}(\Omega)^N)$.

Dále dostáváme E_M-slabou konvergenci funkcí $P(\mathbf{u}_\epsilon)$ k $\overline{P}$ v $L_{\overline{M}}(Q_T)^{N\times N}$. Jestliže si uvědomíme, že funkce $\frac{d}{dt}(\rho_\epsilon\mathbf{u}_\epsilon)$ jsou stejnoměrně omezené vzhledem k ϵ v prostoru $L_{\Phi_{1/\alpha}}(0,T;W^{-1}L_{\Phi_{1/2}}(\Omega))$, $\alpha > 2$, (důkaz je stejný jako v Lemma 4.6), pak odtud vyplývá, že $\rho_\epsilon\mathbf{u}_\epsilon \otimes \mathbf{u}_\epsilon \to \rho\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}$ v $\mathcal{D}'(Q_T)$ a z omezenosti $\rho_\epsilon\mathbf{u}_\epsilon \otimes \mathbf{u}_\epsilon$ v $L_{\Psi_{2p}}(0,T;L_{\Phi_\beta}(\Omega)^{N\times N})$, $p > N$, $*$-slabě konverguje i v tomto prostoru. Z výše uvedených odhadů navíc plyne, že

$$\rho_\epsilon \to \rho \text{ v prostoru } C([0,T];L^{weak}_{\Phi_\beta}(\Omega)) \tag{4.67}$$

a

$$\rho_\epsilon\mathbf{u}_\epsilon \to \rho\mathbf{u} \text{ v } C([0,T];L^{weak}_{\Phi_{\beta/2}}(\Omega)^N). \tag{4.68}$$

Zbývá opět ověřit, že $\operatorname{div}\overline{P} = \operatorname{div}P(\mathbf{u})$ v $L_{\Phi_{1/\alpha}}(0,T;W^{-1}L_{\Phi_{1/2}}(\Omega)^{N\times N})$ pro $\alpha > 2$. Vezměme nyní rovnice kontinuity (4.1) a (4.17) a z renormalizované rovnice kontinuity odvoďme

$$\begin{aligned}\int_\Omega \rho_\epsilon(t)\ln(\rho_\epsilon(t)+\delta) - \rho_0\ln(\rho_0+\delta)\;dx& \\ \leq -\int_0^t\int_\Omega \frac{\rho_\epsilon^2}{\delta+\rho_\epsilon}\operatorname{div}\mathbf{u}_\epsilon\;dxds&\end{aligned} \tag{4.69}$$

a

$$\int_\Omega \rho(t)\ln(\rho(t)+\delta) - \rho_0\ln(\rho_0+\delta)\;dx = -\int_0^t\int_\Omega \frac{\rho^2}{\delta+\rho}\operatorname{div}\mathbf{u}\;dxds, \tag{4.70}$$

kde $\delta \in (0,1)$ je libovolné ale pevné číslo. Výše uvedené rovnice dostaneme následujícím způsobem. Vezmeme funkci $\theta_k(z) \uparrow z\ln(z+\delta)$ v (4.37). Po následujících přechodech $n \to \infty$, $k \to \infty$ a vynechání členu násobeného ϵ dostaneme s použitím konvergencí z Lemma 4.6 a Leviho věty první nerovnost. Při odvození druhé identity postupujeme tak, že odvodíme analogickým postupem jako v Lemma 4.2 s použitím podmínky (4.19) identitu

$$\int_\Omega \theta_k((\rho_n(t))_h)\ dx - \int_\Omega \theta_k((\rho_0)_h)\ dx$$
$$+ \int_0^t \int_\Omega ((\rho_n)_h \theta_k'((\rho_n)_h) - \theta((\rho_n)_h)) \mathrm{div}\, \mathbf{u}_n\ dxds$$
$$= \int_0^t \int_\Omega r_h^n \theta_k'((\rho_n)_h)\ dxds - \epsilon \int_0^t \int_\Omega (\nabla \rho_n * \nabla \vartheta_h) \theta_k'(\rho_n)\ dxds. \qquad (4.71)$$

Pak analogickým způsobem po přechodech $n \to \infty$, $\epsilon \to 0$, $h \to 0$ a $k \to \infty$ s použitím konvergencí z důkazu tohoto lemma odvodíme rovnici (4.70). Zde je třeba zmínit důležitou skutečnost, že konvergence $\rho_\epsilon \to \rho$ v $C([0,T]; L^{weak}_{\Phi_\beta}(\Omega))$ implikuje, že $(\rho_\epsilon)_h$ konverguje pro každé $t \in [0,T]$ a s.v. $x \in \Omega$ k ρ_h.

Nyní lze využít G-diferencovatelnosti a konvexity funkcionálu $\int_\Omega \rho \ln(\rho + \delta)\ dx$ k odvození nerovnosti

$$\int_\Omega \left(\ln(\rho + \delta) + \frac{\rho}{\rho + \delta} \right) (\rho_\epsilon - \rho)\ dx \le \int_\Omega \rho_\epsilon \ln(\rho_\epsilon + \delta) - \rho \ln(\rho + \delta)\ dx$$

pro s.v. $t \in [0,T]$. Je vidět, že volba $\delta > 0$ zajišťuje, že levá strana není rovna $-\infty$.

Po odečtení (4.70) od (4.69) dostáváme

$$\int_\Omega \left(\ln(\rho + \delta) + \frac{\rho}{\rho + \delta} \right) (\rho_\epsilon - \rho)\ dx \le \int_\Omega \rho_\epsilon \ln(\rho_\epsilon + \delta) - \rho \ln(\rho + \delta)\ dx$$
$$\le - \int_0^t \int_\Omega \frac{\rho_\epsilon^2}{\delta + \rho_\epsilon} \mathrm{div}\, \mathbf{u}_\epsilon + \frac{\rho^2}{\delta + \rho} \mathrm{div}\, \mathbf{u}\ dxds. \qquad (4.72)$$

Nyní platí odhady

$$\left| \int_0^t \int_\Omega - \frac{\rho_\epsilon^2}{\delta + \rho_\epsilon} \mathrm{div}\, \mathbf{u}_\epsilon + \frac{\rho^2}{\delta + \rho} \mathrm{div}\, \mathbf{u}\ dxds + \int_0^t \int_\Omega \rho_\epsilon \mathrm{div}\, \mathbf{u}_\epsilon - \rho \mathrm{div}\, \mathbf{u}\ dxds \right|$$
$$\le \delta(\|\rho_\epsilon\|_{L^\infty(0,T;L_{\Phi_1}(\Omega))} \|D\mathbf{u}_\epsilon\|_{L_M(0,T;L_M(\Omega))}$$

$$+\|\rho\|_{L^\infty(0,T;L_{\Phi_1}(\Omega))}\|D\mathbf{u}\|_{L_M(0,T;L_M(\Omega))})$$

a

$$\left|\int_0^t (\varphi_n(s)-1)\int_\Omega \rho_\epsilon \mathrm{div}\,\mathbf{u}_\epsilon - \rho \mathrm{div}\,\mathbf{u}\;dxds\right|$$
$$\leq c\left(\frac{1}{n}\right)(\|\rho_\epsilon\|_{L^\infty(0,T;L_{\Phi_1}(\Omega))}\|D\mathbf{u}_\epsilon\|_{L_M(0,T;L_M(\Omega))}$$
$$+\|\rho\|_{L^\infty(0,T;L_{\Phi_1}(\Omega))}\|D\mathbf{u}\|_{L_M(0,T;L_M(\Omega))}),$$

kde $c\left(\frac{1}{n}\right) \to 0$ pro $n \to \infty$, neboť $\varphi_n(t)$ volíme tak, že $\varphi_n \uparrow 1$ v $L_M(0,t)$ a zároveň skoro všude v $(0,t)$, $\varphi_n \in C_0^\infty(0,t)$ a $0 \leq \varphi_n \leq 1$, kde $t \in (0,T]$. Odtud plyne, že

$$\int_\Omega \left(\ln(\rho+\delta) + \frac{\rho}{\delta+\rho}\right)(\rho_\epsilon - \rho)\;dx \leq \int_\Omega \rho_\epsilon \ln(\rho_\epsilon+\delta) - \rho \ln(\rho+\delta)\;dx$$
$$\leq \int_0^t \varphi_n(s)\int_\Omega \rho \mathrm{div}\,\mathbf{u} - \rho_\epsilon \mathrm{div}\,\mathbf{u}_\epsilon\;dxds + c\left(\frac{1}{n}\right) + c_2\delta. \tag{4.73}$$

Ze slabé konvergence zřejmě vyplývá, že

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_0^t \varphi_n'(s)\int_\Omega \rho_\epsilon|\mathbf{u}_\epsilon|^2\;dxds = \int_0^t \varphi_n'(s)\int_\Omega \rho|\mathbf{u}|^2\;dxds. \tag{4.74}$$

Analogicky dostaneme

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_0^t \varphi_n(s)\int_\Omega \rho_\epsilon \mathbf{f}\cdot\mathbf{u}_\epsilon\;dxds = \int_0^t \varphi_n(s)\int_\Omega \rho\mathbf{f}\cdot\mathbf{u}\;dxds \tag{4.75}$$

pro libovolné $t \in (0,T]$. Nyní použijeme hlavní myšlenku důkazu Lemma 4.7. Vezmeme opět funkci $\mathbf{u}_+^\xi$ jako testovací funkci pro rovnici (4.2), kde místo tenzoru $P(\mathbf{u})$ máme tenzor $\overline{P}$, a funkci $\frac{|\mathbf{u}_+^\xi|^2}{2}$ jako testovací funkci pro (4.1) a dostaneme

$$\int_0^t \phi_\eta(s)\int_\Omega \rho\mathbf{u}_+^\xi\cdot\partial_s\mathbf{u}_+^\xi - \rho\mathbf{u}\cdot\partial_s\mathbf{u}_+^\xi\;dxds$$
$$= \int_0^t\int_\Omega \rho(\mathbf{u}_+^\xi\cdot\mathbf{u})\partial_s\phi_\eta(s)\;dxds - \int_0^t\int_\Omega \rho\frac{|\mathbf{u}_+^\xi|^2}{2}\partial_s\phi_\eta(s)\;dxds$$
$$+\int_0^t \phi_\eta(s)\int_\Omega \rho\sum_{i,j=1}^N u^j\frac{\partial(u_i)_+^\xi}{\partial x_j}(u_i-(u_i)_+^\xi) + \rho\mathrm{div}\,\mathbf{u}_+^\xi\;dxds$$

$$-\int_0^t \phi_\eta(s) \int_\Omega \overline{P} : D\mathbf{u}_+^\xi + \rho\mathbf{f} \cdot \mathbf{u}_+^\xi \; dxds. \tag{4.76}$$

Po limitním přechodu $\xi \to 0$ s pomocí konvergencí zmíněných v důkazu Lemma 4.7 odvodíme identitu

$$\frac{d}{dt} \int_\Omega \frac{1}{2}\rho|\mathbf{u}|^2 \; dx + \int_\Omega \overline{P} : D\mathbf{u} \; dx - \int_\Omega \rho \mathrm{div}\, \mathbf{u} \; dx = \int_\Omega \rho\mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \; dx, \tag{4.77}$$

která je splněna ve smyslu distribucí. Po odečtení identit (4.58) (pro $\rho = \rho_\epsilon$ a $\mathbf{u} = \mathbf{u}_\epsilon$) a (4.77) dostáváme s použitím nerovnosti (4.73)

$$\int_0^t \varphi_n(s) \int_\Omega \overline{P} : D\mathbf{u} - P(\mathbf{u}_\epsilon) : D\mathbf{u}_\epsilon \; dxds$$

$$= \int_0^t \varphi_n(s) \int_\Omega \rho \mathrm{div}\, \mathbf{u} - \int_\Omega \rho_\epsilon \mathrm{div}\, \mathbf{u}_\epsilon \; dxds + c_1(\epsilon)$$

$$\geq \int_\Omega \left(\ln(\rho + \delta) + \frac{\rho}{\rho + \delta} \right) (\rho_\epsilon - \rho) \; dx + c_1(\epsilon) - c_2\delta - c\left(\frac{1}{n}\right),$$

kde $c_1(\epsilon)$ zahrnuje (4.74) a (4.75) a tedy $c_1(\epsilon) \to 0$ pro $\epsilon \to 0$. Zřejmě integrál na pravé straně konverguje k nule, neboť $\rho_\epsilon \to \rho$ v $C([0,T]; L_{\Phi_\beta}^{weak}(\Omega))$. Z monotonie operátoru P vyplývá, že

$$\liminf_{\epsilon \to 0} \int_0^t \varphi_n(s) \int_\Omega P(\mathbf{u}_\epsilon) : D\mathbf{u}_\epsilon \; dxds$$

$$\geq \int_0^t \varphi_n(s) \int_\Omega \overline{P} : D\mathbf{v} + P(\mathbf{v}) : D\mathbf{u} - P(\mathbf{v}) : D\mathbf{v} \; dxds.$$

Odtud

$$-c_2\delta - c\left(\frac{1}{n}\right) \leq \int_0^t \varphi_n(s) \int_\Omega (\overline{P} - P(\mathbf{v})) : D(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \; dxds,$$

kde $c\left(\frac{1}{n}\right) \to 0$ pro $n \to \infty$ a δ je libovolně malá. Odtud plyne

$$0 \leq \int_0^T \int_\Omega (\overline{P} - P(\mathbf{v})) : D(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \; dxds.$$

Volbou $\mathbf{v} = \mathbf{u} - \lambda\phi$ ukážeme, že

$$\mathrm{div}\, \overline{P} = \mathrm{div}\, P(\mathbf{u}) \text{ v } L_{\Phi_{1/\alpha}}(0,T; W^{-1}L_{\Phi_{1/2}}(\Omega)^{N\times N})$$

pro $\alpha > 2$. Energetická nerovnost (4.66) plyne ihned z (4.49) pro $\rho = \rho_\epsilon$ a $\mathbf{u} = \mathbf{u}_\epsilon$ s použitím konvergencí odvozených během důkazu tohoto lemma a (4.10). Obdobným způsobem, jako jsme odvodili (4.77), odvodíme identitu

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \frac{1}{2}\rho|\mathbf{u}|^2\,dx + \int_\Omega P(\mathbf{u}) : D\mathbf{u}\,dx - \int_\Omega \rho \operatorname{div}\mathbf{u}\,dx = \int_\Omega \rho\mathbf{f}\cdot\mathbf{u}\,dx, \quad (4.78)$$

která je splněna ve smyslu distribucí. (4.65) pak vyplývá z renormalizované rovnice kontinuity. $\square$

Abychom mohli ukončit důkaz existence řešení úlohy (4.1)–(4.5), aproximujeme funkci $\rho_0 \in L_{\Phi_\beta}$ funkcemi $\rho_{0,\eta} \in C^{2+\mu}(\Omega)$ s vlastnostmi

$$0 < \eta \leq \rho_{0,\eta}(x) \leq \frac{1}{\eta},\ \nabla\rho_{0,\eta}\cdot\mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0,$$

$$\rho_{0,\eta} \to \rho_0 \text{ v } L_{\Phi_\beta}(\Omega) \text{ pro } \eta \to 0.$$

Funkce $\rho_{0,\eta}$ můžeme zkonstruovat například takto: Vezmeme oblast Ω_h takovou, že $\Omega_h \subset \Omega$ a $dist(\partial\Omega_h, \Omega) = h$, a funkci $\rho_{0,h}$ definovanou předpisem

$$\rho_{0,h} := \begin{cases} \rho & \text{pro } x \in \Omega_h, \\ 0 & \text{pro } x \in \Omega\setminus\Omega_h. \end{cases}$$

Pak můžeme definovat funkci $\rho_{0,\eta}$ takto:

$$\rho_{0,\eta} := \eta + T_{k(\eta)}(\rho_{0,h(\eta,k(\eta))} * \vartheta_{h(\eta,k(\eta))/2})$$

pro $\eta > 0$ a vhodně zvolené indexy $k(\eta)$ a $h(\eta, k(\eta))$. Dále položme

$$\tilde{\mathbf{q}}_0^\eta(x) = \begin{cases} \mathbf{q}_0(x)\sqrt{\frac{\rho_{0,\eta}(x)}{\rho_0(x)}} & , \text{jestliže } \rho_0(x) > 0 \\ 0 & , \text{jestliže } \rho_0(x) = 0. \end{cases}$$

Na základě definice funkce $\mathbf{q}_0$ (viz. Věta 4.9 níže) máme omezenost funkcí $\frac{|\tilde{\mathbf{q}}_0^\eta|^2}{\rho_{0,\eta}}$ v $L^1(\Omega)$ nezávisle na $\eta > 0$.

Definujeme funkce $\mathbf{h}^\eta \in C^2(\overline{\Omega})$ takové, že

$$\left\| \frac{\tilde{\mathbf{q}}_0^\eta}{\sqrt{\rho_{0,\eta}}} - \mathbf{h}^\eta \right\|_2 \leq \eta.$$

Vezmeme $\mathbf{q}_0^\eta = \mathbf{h}^\eta \sqrt{\rho_{0,\eta}}$. Pak lze snadno ověřit, že

$$\frac{|\mathbf{q}_0^\eta|^2}{\rho_{0,\eta}} \text{ jsou omezené v } L^1(\Omega) \text{ nezávisle na } \eta \tag{4.79}$$

a navíc

$$\mathbf{q}_0^\eta \to \mathbf{q}_0 \text{ v } L^1(\Omega). \tag{4.80}$$

Věta 4.9 *Nechť* $\mathbf{f} \in \widetilde{L}_{\Psi_{\beta/q}}(Q_T)$, $\beta > 2$ *a* $q > 1$. *Pro daná počáteční data* $\rho_0 \in L_{\Phi_\beta}(\Omega)$ *a* $|\mathbf{q}_0|^2 \in L^1(\Omega)$ *taková, že* $\rho_0 \geq 0$, $\mathbf{q}_0 := 0$, *jestliže* $\rho_0 = 0$, $\frac{|\mathbf{q}_0|^2}{\rho_0} := 0$, *jestliže* $\rho_0 = 0$, *a* $\frac{|\mathbf{q}_0|^2}{\rho_0} \in L^1(\Omega)$ *pro* $\rho_0 > 0$, *existují funkce*

$$\rho \in L^\infty(0,T; L_{\Phi_\beta}(\Omega)) \text{ a } \mathbf{u} \in Y$$

takové, že rovnice

$$\rho_t + \operatorname{div}(\rho\mathbf{u}) = 0$$

je splněna nad prostorem $\mathcal{D}'(Q_T)$ *a taktéž ve smyslu renormalizovaného řešení. Rovnice*

$$(\rho\mathbf{u})_t + \operatorname{div}(\rho\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}) - \operatorname{div} P(\mathbf{u}) + \nabla\rho = \rho\mathbf{f}$$

je splněna v prostoru $\mathcal{D}'(Q_T)$. *Řešení vyhovuje počátečním podmínkám* (4.4) *a* (4.5) *v prostoru* $C([0,T]; W^{-1}L_{\Phi_\beta}(\Omega))$ *a* $C([0,T]; W^{-1}L_{\Phi_\beta}(\Omega)^N)$. *Navíc platí identita*

$$\frac{d}{dt}\left(\int_\Omega \frac{1}{2}\rho|\mathbf{u}|^2 + \rho\ln\rho \, dx\right) + \int_\Omega P(\mathbf{u}) : D\mathbf{u} \, dx = \int_\Omega \rho\mathbf{f}\cdot\mathbf{u} \, dx \tag{4.81}$$

nad $\mathcal{D}'(0,T)$ *a energetická nerovnost*

$$E[\rho,\mathbf{u}](t) + \int_0^t \int_\Omega P(\mathbf{u}) : D\mathbf{u} \, dxds \leq \int_0^t \int_\Omega \rho\mathbf{f}\cdot\mathbf{u} \, dxds + \int_\Omega \frac{1}{2}\frac{|\mathbf{q}_0|^2}{\rho_0} \, dx \tag{4.82}$$

pro s.v. $t \in [0,T]$.

D ů k a z: Základní odhady a limitní přechody jsou totožné jako v Lemma 4.8.
$\square$

4.1.6 Poznámky

V této sekci odvodíme omezenost funkcí ρ_n v prostoru $L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega))$ pro libovolnou dimenzi, což rozšiřuje platnost Lemma 4.6 na všechny dimenze. Nejdříve ověříme, že posloupnost $\{\rho_n\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená v prostoru $L^2(0,T;W^{1,p}(\Omega))$ pro nějaké $p \in (1,2)$. Zřejmě platí odhad

$$\int_\Omega |\nabla \rho_n| \; dx \leq \sqrt{\int_\Omega \frac{|\nabla \rho_n|^2}{\rho_n} \; dx} \sqrt{\int_\Omega \rho_n \; dx}$$

a tedy ρ_n jsou omezené v $L^2(0,T;W^{1,1}(\Omega))$. Z vět o vnoření máme omezenost v $L^2(0,T;L^{\frac{N}{N-1}}(\Omega))$. Z rovnice kontinutity (4.17) po otestování funkcí $\theta'(s) = qs^{q-1}$ dostaneme

$$\int_\Omega \rho_n^q(t) \; dx + c_1(q)\epsilon \int_0^t \int_\Omega \frac{|\nabla \rho_n|^2}{\rho_n^{2-q}} \; dxds$$

$$= -c_2(q) \int_0^t \int_\Omega \operatorname{div} \mathbf{u}_n |\rho_n|^q \; dxds + \int_\Omega \rho^q(0) \; dx.$$

Analogicky jako v důkazu Lemma 4.6 odvodíme odhad

$$\left| c_2(q) \int_0^t \int_\Omega \operatorname{div} \mathbf{u}_n |\rho_n|^q \; dxds \right| \leq c + \frac{1}{\beta} \int_0^t \int_\Omega |\rho_n|^{\frac{q\beta}{2}} |\rho_n|^{\frac{q\beta}{2}} \; dxds$$

$$\leq c + \frac{1}{\beta} \int_0^t \left(\int_\Omega |\rho_n|^q \; dx \right)^{\frac{1}{q}\frac{q\beta}{2}} \left(\int_\Omega |\rho_n|^{\frac{q\beta}{2-\beta}} \; dx \right)^{\frac{2-\beta}{q\beta}\frac{q\beta}{2}} ds$$

$$\leq c + \frac{1}{\beta} \|\rho_n\|^{\frac{q\beta}{2}}_{L^\infty(0,T;L^q(\Omega))} \|\rho_n\|^{\frac{q\beta}{2}}_{L^{\frac{q\beta}{2}}(0,T;L^{\frac{q\beta}{2-\beta}}(\Omega))}$$

za podmínek

$$\frac{q\beta}{2} < q \leq 2, \;\; \frac{q\beta}{2-\beta} = \frac{N}{N-1}, \;\; q > 1,$$

což vede na podmínky

$$\beta \in (1, \frac{2N}{2N-1}) \text{ a } q = \frac{N(2-\beta)}{(N-1)\beta}.$$

Z následujícího odhadu

$$\int_\Omega |\nabla \rho_n|^r \; dx = \int_\Omega \left(\frac{|\nabla \rho_n|}{\sqrt{\rho_n}} \right)^r \rho_n^{r/2} \; dx \leq \left\| \frac{\nabla \rho_n}{\sqrt{\rho_n}} \right\|_2^r \|\rho_n\|^{r/2}_{\frac{r}{2-r}}$$

pak vyplývá, že ρ_n jsou omezené v $L^2(0,T;W^{1,\frac{2q}{q+1}}(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;L^q(\Omega))$ a funkce $\frac{|\nabla\rho_n|}{\rho_n^{\frac{2-q}{2}}}$ v $L^2(Q_T)$. Shrneme-li celý postup, pak jsme vlastně ukázali, že funkce ρ_n jsou omezené nezávisle na n v prostoru $L^2(0,T;W^{1,p}(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;L^p(\Omega))$ a $\frac{|\nabla\rho_n|}{\rho_n^{\frac{2-p}{2}}}$ v $L^2(Q_T)$ pro $p > 1$. Nyní chceme dokázat, že ρ_n jsou omezené v prostoru $L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$. Důkaz povedeme sporem. Předpokládejme tedy, že existuje $p_0 \in (1,2)$ takové, že funkce ρ_n jsou omezené v uvedených prostorech pro každé $p < p_0$ ale ne pro $p = p_0$. Z rovnice kontinuity (4.17) dostaneme analogickým způsobem jako před chvílí, že $\rho_n \in L^\infty(0,T;L^q(\Omega))$ pro $q = \frac{Np}{N-p}\frac{2-\beta}{\beta}$ a $\beta \in (1, \frac{2N}{2N-1})$. Snadno odvodíme odhad

$$\int_\Omega |\nabla\rho_n|^r \, dx = \int_\Omega \left(\frac{|\nabla\rho_n|}{\rho_n^{\frac{2-p}{2}}} \right)^r \rho_n^{\frac{r(2-p)}{2}} \, dx \leq \left\| \frac{\nabla\rho_n}{\rho_n^{\frac{2-p}{2}}} \right\|_2^r \|\rho_n\|_{\frac{r(2-p)}{2-r}}^{\frac{r(2-p)}{2}}.$$

Odtud dostaneme, že $r = \frac{2q}{2-p+q}$. Nyní zbývá ukázat, že $r > p_0$. Po dosazení za q vede tato skutečnost na nerovnost

$$4Np - 2Np\beta - 2p_0N\beta > -2p_0p\beta + 2pp_0N(1-\beta) + p^2p_0\beta.$$

Jelikož pro $p \to p_0$ a $\beta \to 1$ dostaneme nerovnost

$$0 > -2p_0^2 + p_0^3,$$

která je splněna pro $p_0 < 2$, tak lze najít takové hodnoty p a β, že $r > p_0$. Pro odhad členu $\frac{|\nabla\rho_n|}{\rho_n^{\frac{2-p_0}{2}}}$ použijeme rovnici kotinuity a analogický postup jako na začátku této kapitoly a tedy dostáváme spor. Odtud tedy vyplývá, že ρ_n jsou omezené v $L^2(0,T;W^{1,p}(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;L^p(\Omega))$ pro každé $p \in (1,2)$. V posledním kroku pak testujeme rovnici kontinuity (4.17) funkcí ρ_n a z vět o vnoření pro vhodné p zopakujeme postup z Lemma 4.6.

4.2 Chování řešení Navierových-Stokesových rovnic popisujících proudění izotermálních stlačitelných tekutin pro čas jdoucí k nekonečnu

4.2.1 Úvod

Tato kapitola bezprostředně navazuje na předchozí kapitolu a budeme zde zkoumat stabilizaci slabého řešení Navierových-Stokesových rovnic popisujících proudění izotermálních stlačitelných tekutin s nelineárním tenzorem napětí. Připomeňme nyní tento model spolu s okrajovými a počátečními podmínkami:

$$\rho_t + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0, \tag{4.83}$$

$$(\rho \mathbf{u})_t + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla \rho - \operatorname{div} P(\mathbf{u}) = \rho \mathbf{f}, \tag{4.84}$$

$$\mathbf{u}(x,t) = 0,\ x \in \partial\Omega,\ t \in (0,\infty), \tag{4.85}$$

$$\rho(x,0) = \rho_0(x) \geq 0,\ x \in \Omega, \tag{4.86}$$

$$(\rho \mathbf{u})(x,0) = \mathbf{q}_0(x),\ x \in \Omega, \tag{4.87}$$

kde Ω je omezená oblast v $\mathbb{R}^N$.

Mějme Youngovu funkci Φ s vlastností, že pro její komplementární funkci Ψ platí, že

$$\int_\Omega \Psi_1(|w|^{\frac{1}{\alpha}})\ dx \leq c$$

pro w takové, že $\int_\Omega \Psi(w)\ dx \leq 1$, a pro libovolné ale pevné $\alpha \in (0,1)$. Stabilizací budeme rozumět, že pro dané slabé řešení problému (4.83)–(4.87), které splňuje energetickou nerovnost, existuje funkce ρ_∞ taková, že

$$\lim_{t\to\infty} \|\rho(t) - \rho_\infty\|_\Phi = 0, \tag{4.88}$$

kde rovnovážný stav hustoty ρ_∞ je jediným řešením rovnice

$$\nabla \rho_\infty = \rho_\infty \mathbf{f} \quad \text{ s.v. v } \Omega, \tag{4.89}$$

$$\int_\Omega \rho_\infty\ dx = \int_\Omega \rho_0\ dx,\ \rho_\infty \geq 0. \tag{4.90}$$

Základní myšlenka důkazu výše zmíněné stabilizace je převzata z [24] a spočívá v nalezení funkce $\overline{\rho}(t)$, která konverguje silně pro $t \to \infty$ a zároveň platí limita

$$\lim_{t\to\infty} \|\theta(\rho(t)) - \theta(\overline{\rho}(t))\|_r = 0 \tag{4.91}$$

pro vhodnou omezenou a rostoucí funkci θ a libovolné r, $r \in [1, \infty)$. Celá konstrukce funkce $\overline{\rho}$ je založena na řešitelnosti Neumannovy úlohy

$$\int_\Omega \nabla w_\epsilon(s) \cdot \nabla \eta \, dx = \int_\Omega R_\epsilon(\rho(s))\mathbf{f} \cdot \nabla \eta \, dx, \ \forall \eta \in W^{1,p}(\Omega),$$

$$\int_\Omega w_\epsilon(s) \, dx = 0.$$

V našem případě bychom ale potřebovali, aby funkce $\nabla w_\epsilon(\cdot, t)$ náležela do prostoru $L_{\Phi_1}(\Omega)$ pro s.v. $t \in (0, \infty)$. Není ale jasné, zda tento výsledek plyne ze skutečnosti, že $\rho \in L_{\Phi_1}(\Omega)$. Proto je nutné celý postup modifikovat pro Neumannovu úlohu

$$\int_\Omega \nabla w_{\epsilon k}(s) \cdot \nabla \eta \, dx = \int_\Omega R_\epsilon(T_k(\rho)(s))\mathbf{f} \cdot \nabla \eta \, dx, \ \forall \eta \in W^{1,p}(\Omega),$$

$$\int_\Omega w_{\epsilon k}(s) \, dx = 0$$

s vhodnou seřezávací funkcí T_k definovanou v Definici 1.42. Celý postup pak vede na konstrukci funkce $\overline{\rho}_k$. Ve zbylé části důkazu pak ověříme, že lze přejít pro $k \to \infty$ k limitě (4.91).

4.2.2 Základní předpoklady

Stabilizaci řešení budeme zkoumat za následujících předpokladů:

1. $\mathbf{f} = \nabla g, \ g \in W^{2,\infty}(\Omega), \ \partial\Omega \in C^2$;

2. $\rho_0 \in L_{\Phi_1}(\Omega)$, $\rho_0 \geq 0$, $\mathbf{q}_0 := 0$, pokud $\rho_0 = 0$, $\frac{|\mathbf{q}_0|^2}{\rho_0} := 0$, jestliže $\rho_0 = 0$, a $\frac{|\mathbf{q}_0|^2}{\rho_0} \in L^1(\Omega)$, $\mathbf{u}_0 := \frac{\mathbf{q}_0}{\rho_0}$ pro $\rho_0 > 0$, $\mathbf{u}_0 := 0$ pro $\rho_0 > 0$;

3. tenzor P je koercivní, t.j.

$$\int_\Omega P(\mathbf{v}) : D\mathbf{v} \, dx \geq \int_\Omega M(D\mathbf{v}) \, dx \tag{4.92}$$

   pro $\mathbf{v} \in X$;

4. tenzor $P(\cdot)$ je omezený v následujícím smyslu

$$\int_\Omega \overline{M}(P(\mathbf{v}))\,dx \le c\left(\int_\Omega M(D\mathbf{v})\,dx + 1\right) \tag{4.93}$$

pro $\mathbf{v} \in X$ a splňuje nerovnost

$$2^m\|P(\mathbf{v})\|_{\overline{M}} \le c\left(l^m\int_\Omega M(D\mathbf{v})\,dx + 1\right) \tag{4.94}$$

pro každé $m \in \mathbb{N}_0$, $\mathbf{v} \in X$ a pro nějakou pevnou konstantu $l > 2$. Tato podmínka nám říká, že je-li integrál na pravé straně malý, pak musí být v odpovídající normě malé i $P(\mathbf{v})$.

Příklad: Vezměme tenzor P z kapitoly 5.1.1. Není problém ověřit, že konstanta l u nerovnosti (4.94) pochází z Δ_2-podmínky funkce $\overline{M}$. Zbylé podmínky ověříme stejně jako v předchozí kapitole.

4.2.3 Chování funkcí ρ a $D\mathbf{u}$ pro čas jdoucí k nekonečnu

Lemma 4.10 *Nechť ρ a $\mathbf{u}$ je slabé řešení úlohy (4.83)–(4.87) vyhovující energetické nerovnosti (4.82). Potom hustota $\rho \in L^\infty(0,\infty;\widetilde{L}_{\Phi_1}(\Omega))$ a*

$$\int_0^\infty\int_\Omega M(D\mathbf{u})\,dxds < \infty.$$

Odtud vyplývá, že

$$\lim_{t\to\infty}\int_{t-a}^{t+a}\int_\Omega M(D\mathbf{u})\,dxds = 0 \text{ pro libovolné } a > 0. \tag{4.95}$$

D ů k a z: Použijeme funkci g jako testovací funkci pro rovnici (4.83). To nám umožňuje přepsat energetickou nerovnost na následující tvar

$$\begin{aligned} E[\rho,\mathbf{u}](t) - \int_\Omega \rho(t)g\,dx + \int_0^t\int_\Omega P(\mathbf{u}) : D\mathbf{u}\,dxds \\ \le E[\rho_0,\mathbf{q}_0] - \int_\Omega \rho_0 g\,dx \end{aligned} \tag{4.96}$$

a tedy

$$\int_\Omega \left(\rho\frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + \rho\ln\rho\right)\, dx + \int_0^t\int_\Omega P(\mathbf{u}) : D\mathbf{u}\; dxds$$
$$\leq \int_\Omega \frac{1}{2}\frac{|\mathbf{q}_0|^2}{\rho_0}\, dx + \int_\Omega \rho_0\ln\rho_0\; dx + 2\|g\|_{2,\infty}\int_\Omega \rho_0\; dx. \tag{4.97}$$

Z (4.97), předpokladu (4.92) a z následující nerovnosti

$$\int_\Omega \rho\ln(1+\rho)\; dx \leq c_1\int_\Omega \rho\ln\rho\; dx + c_2$$

pak vyplývá tvrzení našeho lemma. □

Lemma 4.11 *Nechť platí* (4.95)*. Potom*

$$\lim_{t\to\infty}\int_{t-a}^{t+a} \|D\mathbf{u}(s)\|_{\Psi_2}\; ds = 0,$$

$$\lim_{t\to\infty}\int_{t-a}^{t+a} \|P(\mathbf{u})(s)\|_{\overline{M}}\; ds = 0$$

a

$$\lim_{t\to\infty}\int_{t-a}^{t+a} \|D\mathbf{u}(s)\|^2_{\Psi_2}\; ds = 0$$

pro libovolné $a > 0$.

D ů k a z: První limita plyne ihned z (4.95) a z Lemma 1.37. Důkaz druhé limity vyplývá ihned z nerovnosti (4.94). Třetí limitu dostaneme stejně jako první. Volíme pouze ekvivalentní funkci $\widetilde{\Psi}_2(z) := \Psi_2(z/4)$ s funkcí Ψ_2, pro kterou použijeme tvrzení Lemma 1.37 a Jensenovu nerovnost pro přechod druhé mocniny na funkci $\widetilde{\Psi}_2(z)$. □

4.2.4 Globálně stejnoměrné odhady

Následující tvrzení nám zajišťuje existenci funkce θ s vhodnými vlastnostmi pro naši další konstrukci.

Tvrzení 4.12 [24] *Existuje kladná konstanta c_0 a omezená, rostoucí, lichá a spojitě diferencovatelná funkce θ na množině $\mathbb{R}$ taková, že $\lim_{r\to\infty} r\theta'(r) = 0$ a $\theta'(r) > 0$. Funkce θ navíc splňuje nerovnost*

$$(r_1 - r_2)(\theta(r_1) - \theta(r_2)) \geq c_0(\theta(r_1) - \theta(r_2))^2. \tag{4.98}$$

Pro každé $s > 0$ označme $w_{\epsilon k}(s)$ jediné řešení Neumannovy úlohy

$$\int_\Omega \nabla w_{\epsilon k}(s) \cdot \nabla \eta \; dx = \int_\Omega R_\epsilon(T_k(\rho)(s))\mathbf{f} \cdot \nabla \eta \; dx, \; \forall \eta \in W^{1,p}(\Omega),$$

$$\int_\Omega w_{\epsilon k}(s) \; dx = 0 \tag{4.99}$$

pro $s > 0$ a $1 < p < \frac{N}{N-1}$. Toto řešení splňuje odhad

$$\|w_{\epsilon k}\|_{L^\infty(0,\infty;W^{1,p'}(\Omega))} \leq c\|R_\epsilon(T_k(\rho))\|_{L^\infty(0,\infty;L^{p'}(\Omega))} \leq ck < +\infty \tag{4.100}$$

pro $p' > N$ a $k = 1, 2, \ldots$ libovolné ale pevné.

Nyní definujme funkci

$$G_{\epsilon k}(s, m) := \int_\Omega \theta(w_{\epsilon k}(s) + m) \; dx \tag{4.101}$$

pro $s > 0$, $m \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$, $k = 1, 2, \ldots$. Pak pro každé $s > 0$, $\epsilon > 0$ a $k = 1, 2, \ldots$ dostaneme $\lim_{m\to\pm\infty} G_{\epsilon k}(s, m) = \pm|\Omega| \sup_{r\geq 0} \theta(r)$ a $\frac{\partial G_{\epsilon k}}{\partial m}(s, m) > 0$ pro $m \in \mathbb{R}$. Poněvadž pro skoro všechna (x, s) je funkce $\rho(x, s)$ konečná, je

$$\int_\Omega R_\epsilon(\theta(\rho(x, s))) \; dx = \int_\Omega \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_\epsilon(s - \tau)\theta(\rho(x, \tau)) \; d\tau dx$$

$$< \theta(\infty) \int_\Omega \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_\epsilon(s - \tau) \; d\tau dx = \theta(\infty)|\Omega|.$$

Odtud plyne, že $\int_\Omega R_\epsilon(\theta(\rho(x, s))) \; dx$ leží v oboru hodnot funkce $G_{\epsilon k}(s, \cdot)$ a pro libovolná ale pevná $s > 0$, $\epsilon > 0$ a $k = 1, 2, \ldots$ má rovnice

$$G_\epsilon(s, m_{\epsilon k}(s)) = \int_\Omega R_\epsilon(\theta(\rho(s))) \; dx \tag{4.102}$$

jediné řešení $m = m_{\epsilon k}(s)$. Nyní definujme funkci

$$\overline{\rho}_{\epsilon k}(s) := w_{\epsilon k}(s) + m_{\epsilon k}(s). \tag{4.103}$$

Z výrazů (4.102) a (4.103) dostáváme

$$\int_\Omega \theta(\overline{\rho}_{\epsilon k}(x, s)) \; dx = \int_\Omega R_\epsilon(\theta(\rho(x, s))) \; dx \tag{4.104}$$

pro $s > 0,\ \epsilon > 0$ a $k = 1, 2, \ldots$. Nakonec definujme pomocnou funkci $\psi_{\epsilon k}(s)$, která je řešením rovnice

$$\operatorname{div} \psi_{\epsilon k}(s) = R_\epsilon(\theta(\rho(s))) - \theta(\overline{\rho}_{\epsilon k}(s)) \text{ na } \Omega,$$

$$\psi_{\epsilon k}(x, s) = 0,\ x \in \partial\Omega, \tag{4.105}$$

pro $s > 0$, $\epsilon > 0$ a $k = 1, 2, \ldots$.

Tato úloha není jednoznačně řešitelná, ale jedno z možných řešení lze vyjádřit pomocí slabě singulárního integrálu

$$\psi_{\epsilon k}(s) = S(R_\epsilon(\theta(\rho(s))) - \theta(\overline{\rho}_{\epsilon k}(s)))$$

$$= \int_\Omega K(x, x - y)(R_\epsilon(\theta(\rho(s))) - \theta(\overline{\rho}_{\epsilon k}(s)))\, dy, \tag{4.106}$$

kde funkce K je explicitně definovaná pomocí slabě singulárního jádra. Jak již bylo dokázáno (viz. Věta 3.7), operátor $S \in \mathcal{L}(L^\infty(\Omega), W^1L_M(\Omega))$ při splnění podmínky kompatibility a funkce $\psi_{\epsilon k}(s)$ splňuje odhad

$$\|\psi_{\epsilon k}\|_{L^\infty(0,\infty;W^1L_M(\Omega))} \leq C < \infty \text{ pro } C \text{ nezávislé na } \epsilon \text{ a } k. \tag{4.107}$$

Dále z (4.103) vyplývá, že

$$\int_\Omega \theta(w_{\epsilon k}(s) + m_{\epsilon k}(s))\, dx = \int_\Omega R_\epsilon(\theta(\rho(s)))\, dx.$$

Stejným způsobem jako v [24] lze dokázat, že

$$|m_{\epsilon k}(s)| \leq C < \infty \text{ pro } \epsilon > 0,\ s > 0,\ k = 1, 2, \ldots. \tag{4.108}$$

Lemma 4.13 *Za výše uvedených předpokladů existují následující limity*

$$\lim_{\epsilon \to 0+} w_{\epsilon k} = w_k \text{ v } L^r_{loc}([0, \infty); W^{1,p'}(\Omega)), \tag{4.109}$$

$$\lim_{n \to \infty} m_{\epsilon_n k} = m_k \text{ v } L^\infty_{loc}(0, \infty) \tag{4.110}$$

pro nějakou posloupnost $\epsilon_n \to 0+$ *a pro* $r \in [1, \infty)$, $k = 1, 2, \ldots$. *Odtud*

$$\overline{\rho}_{\epsilon_n k} \to w_k + m_k =: \overline{\rho}_k \tag{4.111}$$

ve smyslu výše uvedených konvergencí pro $k = 1, 2, \ldots$.

D ů k a z: Můžeme psát

$$w_{\epsilon k}(s) = A(R_\epsilon(T_k(\rho(s)))), \text{ kde } A \in \mathcal{L}(L^{p'}(\Omega), W^{1,p'}(\Omega)). \tag{4.112}$$

Jelikož $T_k(\rho) \in L^\infty(\Omega \times (0,\infty))$, tak díky spojitosti regularizátoru dostaneme

$$\lim_{\epsilon \to 0+} R_\epsilon(T_k(\rho)) = T_k(\rho) \text{ v prostoru } L^r_{loc}([0,\infty); L^{p'}(\Omega))$$

pro $r \in [1,\infty)$.

Použitím (4.112) dostaneme (4.109), kde

$$w_k = A(T_k(\rho)).$$

V další části důkazu budeme chtít ukázat, že množina $\{m_{\epsilon k}(s)\}_{\epsilon \in (0,1)}$ je omezená v prostoru $W^{1,2}_{loc}(0,T)$ (lokálně kvůli členu $1/\epsilon\, \phi_0(s/\epsilon)$) pro libovolné $T > 0$ a pro libovolné ale pevné $k = 1, 2, \ldots$. Víme, že

$$\frac{\partial G_{\epsilon k}}{\partial m}(s,m) = \int_\Omega \theta'(w_{\epsilon k}(s) + m)\ dx.$$

Položme

$$c_0 := \inf_{\epsilon, s} \int_\Omega \theta'(w_{\epsilon k}(s) + m_{\epsilon k}(s))\ dx > 0,$$

což lze ověřit stejným postupem jako v [24].

Z věty o implicitních funkcích plyne existence derivace $m'_{\epsilon k}(s)$ mající tvar

$$m'_{\epsilon k}(s) = \left(\int_\Omega \theta'(w_{\epsilon k}(s) + m_{\epsilon k}(s))\ dx \right)^{-1} \times$$

$$\left(\int_\Omega (R_\epsilon \theta(\rho(s)))_t\ dx - \int_\Omega \theta'(w_{\epsilon k}(s) + m_{\epsilon k}(s))(w_{\epsilon k})_t(s)\ dx \right).$$

To vede k odhadu (s použitím Poznámky 4.3)

$$|m'_{\epsilon k}(s)| \le c \left(\|(w_{\epsilon k})_t(s)\|_1 + \|D\mathbf{u}(s)\|_{\Psi_2} + \frac{1}{\epsilon}\phi_0\left(\frac{s}{\epsilon}\right) \right). \tag{4.113}$$

Poněvadž funkce $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$ takové, že $\eta - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \eta\ dy = \triangle \xi$ pro $\xi \in C^2(\overline{\Omega})$, kde $\frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{n}}\Big|_{\partial\Omega} = 0$, jsou husté v prostoru $L^r(\Omega)$, $r \in (1,\infty)$, pak odtud plyne, že

$$\int_\Omega (w_{\epsilon k})_t \eta\ dx = \int_\Omega (w_{\epsilon k})_t \left(\eta - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \eta\ dy \right)\ dx = -\int_\Omega (R_\epsilon(T_k(\rho)))_t \mathbf{f} \cdot \nabla \xi\ dx$$

$$\leq \|\mathbf{f}\|_{1,\infty}\|\nabla\xi\|_{1,p}\|(R_\epsilon(T_k(\rho)))_t\|_{-1,p'} \leq c(\|R_\epsilon(T_k(\rho)\mathbf{u})\|_{p'}$$
$$+\|R_\epsilon((\rho T_k'(\rho)-T_k(\rho))\mathrm{div}\,\mathbf{u})\|_{p'})\|\eta\|_p. \tag{4.114}$$

Poslední část odhadu je důsledkem podoby renormalizované rovnice kontinuity zhlazené přes čas, viz. Poznámka 4.3. Odtud

$$\int_\tau^T |m_{\epsilon k}'(s)|^2\,ds \leq c\bigg(\int_\tau^T \|D\mathbf{u}(s)\|^2_{\Psi_2}\,ds + \int_\tau^T \frac{1}{\epsilon^2}\phi_0^2\left(\frac{s}{\epsilon}\right)\,ds$$
$$+\int_\tau^T \|(w_{\epsilon k})_t(s)\|_1^2\,ds\bigg) \leq c_1(T)+c_2(\tau)+c_3\bigg(\int_0^T \|R_\epsilon(T_k(\rho)\mathbf{u})(s)\|^2_{p'}\,ds$$
$$+\int_0^T \|R_\epsilon((\rho T_k'(\rho(s))-T_k(\rho(s)))\mathrm{div}\,\mathbf{u}(s)\|^2_{p'}\,ds\bigg) \leq k^2c_4(T)+c_2(\tau),\ \tau>0.$$

Zde je třeba si uvědomit, že $T_k'(\rho)=0$ pro taková $(x,t)\in\Omega\times(0,\infty)$, pro něž $\rho(x,t)>k$. Poněvadž z (4.108) vyplývá, že $m_{\epsilon k}(s)$ jsou stejnoměrně omezené, plyne (4.110) z vět o kompaktním vnoření. □

Nyní definujme funkci $Q_k(t)$ předpisem

$$Q_k(t) := \int_{t-1}^t \int_\Omega (\rho(s)-\overline{\rho}_k(s))(\theta(\rho(s))-\theta(\overline{\rho}_k(s)))\,dxds,\ t\geq 1. \tag{4.115}$$

Z monotonie funkce θ dostáváme, že $Q_k(t)\geq 0$. V další části vyšetříme chování funkce $Q_k(t)$ pro čas jdoucí k nekonečnu.

Lemma 4.14 *Nechť $\overline{\rho}_k$ je funkce definovaná předpisem* (4.111). *Pak limes superior funkce $Q_k(t)$ definované vztahem* (4.115) *splňuje nerovnost*

$$0 \leq \limsup_{t\to\infty} Q_k(t) \leq \delta_1(k), \tag{4.116}$$

kde $\delta_1(k)\to 0$ pro $k\to\infty$.

D ů k a z: Mějme $a>1$ a funkci $\varphi\in C_0^\infty(-a,a)$ takovou, že $\varphi\geq 0,\ \varphi(\sigma)=1$ pro $\sigma\in(-1,0)$. Definujme

$$Q_{k,a}^\epsilon(t) := \int_{t-a}^{t+a} \varphi(s-t)\int_\Omega (\rho(s)-\overline{\rho}_{\epsilon k}(s))(R_\epsilon(\theta(\rho(s)))-\theta(\overline{\rho}_{\epsilon k}(s)))\,dxds.$$

Pak zřejmě

$$Q_{k,a}^{\epsilon}(t) = \int_{t-a}^{t+a} \varphi(s-t) \int_{\Omega} (\rho(s) - \overline{\rho}_{\epsilon k}(s))(\theta(\rho(s)) - \theta(\overline{\rho}_{\epsilon k}(s))) \; dxds$$

$$+ \int_{t-a}^{t+a} \varphi(s-t) \int_{\Omega} (\rho(s) - \overline{\rho}_{\epsilon k}(s))(R_{\epsilon}(\theta(\rho(s))) - \theta(\rho(s))) \; dxds,$$

kde poslední člen na pravé straně konverguje k nule pro $\epsilon \to 0+$. Nyní z Lemma 4.13 dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} \int_{t-1}^{t} \int_{\Omega} (\rho(s) - \overline{\rho}_{\epsilon_n k}(s))(\theta(\rho(s)) - \theta(\overline{\rho}_{\epsilon_n k}(s))) \; dxds = Q_k(t)$$

pro $t > 1$ a pro nějakou posloupnost $\epsilon_n \downarrow 0$. Nyní chceme odhadnout $Q_{k,a}^{\epsilon}(t)$. Označme $V_a(t) := \Omega \times (t-a, t+a)$ a testujme rovnici (4.84) funkcí $\varphi(s-t)\psi_{\epsilon k}(s)$. Pak dostaneme

$$\int_{V_a(t)} \varphi(s-t)\rho(s)(R_{\epsilon}(\theta(\rho(s))) - \theta(\overline{\rho}_{\epsilon k}(s))) \; dxds$$

$$= \int_{V_a(t)} \varphi(s-t)\rho(s) \operatorname{div} \psi_{\epsilon k}(s) \; dxds$$

$$= \int_{V_a(t)} \varphi(s-t)\Big((-\rho\mathbf{u}(\psi_{\epsilon k}(s))_t - \rho\mathbf{u}\cdot(\mathbf{u}\cdot\nabla)\psi_{\epsilon k}(s) + P(\mathbf{u}) : D\psi_{\epsilon k}(s)$$

$$-\rho\mathbf{f}\cdot\psi_{\epsilon k}(s)\Big) \; dxds - \int_{V_a(t)} \varphi'(s-t)\rho\mathbf{u}\psi_{\epsilon k}(s) \; dxds. \tag{4.117}$$

Vezmeme Helmholz-Weylův rozklad funkce $\psi_{\epsilon k}(s)$, t.j.

$$\psi_{\epsilon k}(s) = \nabla z_{\epsilon k}(s) + \mathbf{v}_{\epsilon k}(s), \quad \operatorname{div} \mathbf{v}_{\epsilon k}(s) = 0 \text{ v } \Omega, \quad \mathbf{v}_{\epsilon k}(s)\cdot\mathbf{n} = 0 \text{ na } \partial\Omega$$

pro skoro všechna $s \in (0, \infty)$. Z obvyklé konstrukce rozkladu, z (4.105) a z (4.107) vyplývá, že $\int_{\Omega} z_{\epsilon k} \; dx = 0$, $\mathbf{v}_{\epsilon k} \in W^{1,r}(\Omega)$, $z_{\epsilon k} \in W^{2,r}(\Omega)$, $\frac{\partial z_{\epsilon k}}{\partial \mathbf{n}}\Big|_{\partial\Omega} = 0$, pro $r \in [1, \infty)$. Nyní zahrneme do výpočtu formulaci úlohy (4.99). Tedy

$$\int_{V_a(t)} \varphi(s-t)\overline{\rho}_{\epsilon k}(s)(R_{\epsilon}(\theta(\rho(s))) - \theta(\overline{\rho}_{\epsilon k}(s))) \; dxds$$

$$= \int_{V_a(t)} \varphi(s-t) w_{\epsilon k}(s) \operatorname{div} \psi_{\epsilon k}(s) \; dxds = -\int_{V_a(t)} \varphi(s-t)\nabla w_{\epsilon k}(s)\cdot\psi_{\epsilon k}(s) \; dxds$$

$$
\begin{aligned}
&= -\int_{V_a(t)} \varphi(s-t)\nabla w_{\epsilon k}(s)\cdot(\nabla z_{\epsilon k}(s)+\mathbf{v}_{\epsilon k}(s))\;dxds \\
&= -\int_{V_a(t)} \varphi(s-t)\nabla w_{\epsilon k}(s)\cdot\nabla z_{\epsilon k}(s)\;dxds \\
&= -\int_{V_a(t)} \varphi(s-t)R_\epsilon(T_k(\rho(s)))\mathbf{f}\cdot\nabla z_{\epsilon k}(s)\;dxds.
\end{aligned}
\tag{4.118}
$$

Odečtením (4.118) od (4.117) získáme vyjádření

$$
\begin{aligned}
&\int_{V_a(t)} \varphi(s-t)(\rho(s)-\overline{\rho}_{\epsilon k}(s))(R_\epsilon(\theta(\rho(s)))-\theta(\overline{\rho}_{\epsilon k}(s)))\;dxds \\
&= \int_{V_a(t)} \varphi(s-t)(\rho(s)-\overline{\rho}_{\epsilon k}(s))\operatorname{div}\psi_{\epsilon k}(s)\;dxds \\
&= \int_{V_a(t)} \varphi(s-t)P(\mathbf{u}) : D\psi_{\epsilon k}(s)\;dxds \\
&- \int_{V_a(t)} \varphi(s-t)\rho\mathbf{u}\cdot(\mathbf{u}\cdot\nabla)\psi_{\epsilon k}(s)\;dxds \\
&- \int_{V_a(t)} \varphi'(s-t)\rho\mathbf{u}\psi_{\epsilon k}(s)\;dxds - \int_{V_a(t)} \varphi(s-t)\rho\mathbf{u}(\psi_{\epsilon k})_t(s)\;dxds \\
&- \int_{V_a(t)} \varphi(s-t)(\rho - R_\epsilon(T_k(\rho(s))))\mathbf{f}\cdot\nabla z_{\epsilon k}(s)\;dxds \\
&- \int_{V_a(t)} \varphi(s-t)\rho\mathbf{f}\cdot\mathbf{v}_{\epsilon k}(s)\;dxds =: \sum_{j=1}^{6} I_{jk}^{\epsilon}(t).
\end{aligned}
$$

Označme

$$
\sigma_a(t) := \max\left\{ \int_{t-a}^{t+a} \|D\mathbf{u}(s)\|_{\Psi_2}\;ds,\; \int_{t-a}^{t+a} \|D\mathbf{u}(s)\|_{\Psi_2}^2\;ds,\; \int_{t-a}^{t+a} \|P(\mathbf{u})(s)\|_{\overline{M}}\;ds \right\}. \tag{4.119}
$$

Nyní odhadneme integrály $I_{jk}^{\epsilon}(t)$ jeden po druhém. Tedy

$$
|I_{1k}^{\epsilon}(t)| \le \|\varphi\|_\infty \int_{t-a}^{t+a} \|P(\mathbf{u})(s)\|_{\overline{M}}\|D\psi_{\epsilon k}(s)\|_M\;ds \le c\sigma_a(t).
$$

$$
\begin{aligned}
|I^\epsilon_{2k}(t)| &\le \|\varphi\|_\infty \int_{V_a(t)} \rho|\mathbf{u}|^2|\nabla\psi_{\epsilon k}(s)|\ dxds \\
&\le c\int_{t-a}^{t+a} \|\mathbf{u}(s)\|^2_\infty \int_\Omega \rho(s)|\nabla\psi_{\epsilon k}(s)|\ dxds \\
&\le c\|\rho\|_{L^\infty(0,\infty;L_{\Phi_1}(\Omega))}\|\nabla\psi_{\epsilon k}\|_{L^\infty(0,\infty;L_M(\Omega))}\sigma_a(t).
\end{aligned}
$$

$$
|I^\epsilon_{3k}(t)| \le \|\varphi'\|_\infty \int_{t-a}^{t+a} \|\mathbf{u}(s)\|_\infty \int_\Omega \rho(s)|\psi_{\epsilon k}(s)|\ dxds \le c\sigma_a(t).
$$

Z (4.99) a (4.114) vyplývá spojitá diferencovatelnost funkce $w_{\epsilon k}(x,s)$, kde $\partial_t w_{\epsilon k}(\cdot,s)$ leží v prostoru $L^r(\Omega)$ pro každé $r>1$, $\epsilon>0$, $s>0$. Z regularity funkce $w_{\epsilon k}(s)$ vyplývá spojitá diferencovatelnost podle proměnné s funkce $G_{\epsilon k}(s,m)$, která je daná vztahem (4.102). Jelikož funkce $\partial G_{\epsilon k}/\partial m$ je kladná, je funkce $m_{\epsilon k}(s)$, definovaná jako jediné řešení rovnice (4.101), spojitě diferencovatelná. Odtud vyplývá, že $\theta(\overline{\rho}_{\epsilon k})$ je diferencovatelná podle proměnné s v prostoru $L^\infty_{loc}([0,\infty);L^r(\Omega))$. Z vlastností jádra K a z (4.106) vyplývá, že $\partial_t\psi_{\epsilon k}(\cdot,t)$ existuje ve smyslu prostoru $W^{1,r}(\Omega)$ pro libovolné $r>1$.

Z Poznámky 4.3 vyplývá, že ve smyslu distribucí můžeme psát

$$
(R_\epsilon(\theta(\rho)))_t = -\mathrm{div}\,(R_\epsilon(\theta(\rho)\mathbf{u})) + R_\epsilon((\theta(\rho)-\rho\theta'(\rho))\mathrm{div}\,\mathbf{u}) + \frac{1}{\epsilon}\phi_0\left(\frac{s}{\epsilon}\right)\rho_0.
$$

Odtud

$$
(\psi_{\epsilon k})_t = S\,\mathrm{div}\,\mathbf{z} + Sq - S\theta(\overline{\rho}_{\epsilon k})_t, \tag{4.120}
$$

kde

$$
\mathbf{z} = -R_\epsilon(\theta(\rho)\mathbf{u}),\ q = R_\epsilon((\theta(\rho)-\rho\theta'(\rho))\mathrm{div}\,\mathbf{u}) + \frac{1}{\epsilon}\phi_0\left(\frac{s}{\epsilon}\right)\rho_0. \tag{4.121}
$$

Z Poznámky 4.3 plyne, že $\mathrm{div}\,\mathbf{z}\in C^\infty(0,\infty;L_{\Psi_1}(\Omega))$. Na základě výše uvedené rovnice, Důsledku 3.9 a Youngovy věty pro konvoluce, viz. např. [9, str. 85], odvodíme odhad

$$
\|S\,\mathrm{div}\,\mathbf{z}\|_M + \|Sq\|_M \le c(\|\mathbf{z}\|_\infty + \|q\|_{p'})
$$

pro $p'>N$. Problém s regularitou ρ_0 překonáme pomocí regularizace funkce ρ_0, poněvadž tento člen zmizí pro $\epsilon\to 0$. Odtud

$$
\|S\,\mathrm{div}\,\mathbf{z}\|_M + \|Sq\|_M \le c\left(\|D\mathbf{u}(s)\|_{\Psi_2} + \frac{1}{\epsilon}\phi_0\left(\frac{s}{\epsilon}\right)\right). \tag{4.122}
$$

Dále z Youngovy věty pro konvoluce vyplývá, že

$$\|S(\theta(\overline{\rho}_{\epsilon k})_t(s))\|_\infty \leq c\|\theta(\overline{\rho}_{\epsilon k})_t(s)\|_{p'}$$

pro $p' > N$ a

$$\|\theta(\overline{\rho}_{\epsilon k})_t(s)\|_{p'} \leq c(\|(w_{\epsilon k})_t(s)\|_{p'} + |m'_{\epsilon k}(s)|). \tag{4.123}$$

Výše uvedené nerovnosti nám umožňují provést následující odhad (k odhadu pravé strany poslední nerovnosti použijeme stejný postup jako v důkazu Lemma 4.13, konkrétně nerovnosti (4.113) a (4.114), a definici seřezávací funkce T_k)

$$|I^\epsilon_{4k}(t)| \leq c\|\varphi\|_\infty \|\rho\|_{L^\infty(0,\infty;L_{\Phi_1}(\Omega))} \int_{t-a}^{t+a} \|\mathbf{u}(s)\|_\infty \|(\psi_{\epsilon k})_t(s)\|_M \; ds \leq ck\sigma_a(t).$$

Pro další integrál platí odhad

$$|I^\epsilon_{5k}(t)| \leq c\|\varphi\|_\infty \|\mathbf{f}\|_\infty \sup_{s,\epsilon,k} \|\psi_{\epsilon k}(s)\|_\infty \int_{t-a}^{t+a} \|R_\epsilon(T_k(\rho(s))) - \rho(s)\|_1 \; ds =: \delta^1_\epsilon(k),$$

kde $\delta^1_\epsilon(k) \to \delta^1(k)$ pro $\epsilon \to 0$ a $\delta^1(k) \to 0$ pro $k \to \infty$ na základě Lemma 1.43.

Zbývá vhodně odhadnout integrál

$$|I^\epsilon_{6k}(t)| = \left| \int_{V_a(t)} \varphi(s-t)\rho(s)\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_{\epsilon k} \; dxds \right|. \tag{4.124}$$

Zde ale nevíme, zda funkce $D\mathbf{v}_{\epsilon k}(s) \in L_M(\Omega)^{N\times N}$ pro skoro všechna $s \geq 0$, $\epsilon \in (0,1)$ a $k = 1, 2, \ldots$, což je nutné pro slabou formulaci úlohy (4.84). Aproximujeme tedy tento integrál integrálem

$$I^\epsilon_{6kh}(t) := \int_{V_a(t)} \varphi(s-t)\rho(s)\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_{\epsilon kh} \; dxds,$$

kde $\mathbf{v}_{\epsilon kh} \in C^1(\overline{\Omega})$ je funkce z Helmholz-Weylova rozkladu funkce $\psi_{\epsilon kh}$, kde $\psi_{\epsilon kh}(s) \in C_0^\infty(\Omega)$, $\|\psi_{\epsilon kh} - \psi_{\epsilon k}\|_{L^\infty(0,\infty;C(\overline{\Omega}))} \to 0$ pro $h \to 0+$ a platí, že $\|\psi_{\epsilon kh}\|_{L^\infty(0,\infty;W_0^{1,r}(\Omega))} \leq C$ pro C nezávislé na k, ϵ a h a pro libovolné $r > N$. Existence funkcí $\psi_{\epsilon kh}$ plyne z Lemma 1.41 a z definice Helmholz-Weylova rozkladu dostáváme

$$\|\nabla z_{\epsilon kh}(s) - \nabla z_{\epsilon k}(s)\|_\infty \leq \|\nabla \psi_{\epsilon kh}(s) - \nabla \psi_{\epsilon k}(s)\|_r \leq C, \; r > N,$$

$$\|\nabla z_{\epsilon kh}(s) - \nabla z_{\epsilon k}(s)\|_2 \le C\|\psi_{\epsilon kh}(s) - \psi_{\epsilon k}(s)\|_M,$$

kde $\psi_{\epsilon kh}(s) = \nabla z_{\epsilon kh}(s) + \mathbf{v}_{\epsilon kh}(s)$.

Z omezenosti gradientu funkce $\psi_{\epsilon k}(s)$ a z Lemma 1.45 vyplývá, že jestliže $|\psi_{\epsilon kh}(s) - \psi_{\epsilon k}(s)|$ konverguje k nule v $L^\infty(0,\infty; L_M(\Omega))$, pak $|\nabla z_{\epsilon kh}(s) - \nabla z_{\epsilon k}(s)|$ a $|\mathbf{v}_{\epsilon k}(s) - \mathbf{v}_{\epsilon kh}(s)|$ konvergují k nule ve stejném prostoru pro $h \to 0+$ a navíc platí

$$|I^\epsilon_{6k}(s) - I^\epsilon_{6kh}(s)| \le \delta_2(h),$$

kde $\delta_2(h) \to 0$ pro $h \to 0+$ a δ_2 nezávisí na s a ϵ.

Funkci $\mathbf{v}_{\epsilon kh}$ můžeme odhadnout takto

$$\|\mathbf{v}_{\epsilon kh}\|_{L^\infty(0,\infty;W^{1,\infty}(\Omega))} \le \Delta(h),$$

kde $\Delta(h) \to \infty$ pro $h \to 0$.

Následující tvrzení nám umožní na základě konstrukce vhodné funkce κ odhadnout integrál $I^\epsilon_{6kh}(s)$.

Tvrzení 4.15 [24] *Nechť Ω je třídy C^2. Pak pro dostatečně malé $\eta > 0$ existuje oblast $\Omega_\eta \subset \Omega$ taková, že $\overline{\Omega}_\eta \subset \Omega$, $|\Omega\setminus\Omega_\eta| \le c\eta$ a jestliže $x \in \partial\Omega$, pak existuje jediné $y = y(x) \in \partial\Omega_\eta$ s vlastností $\mathbf{n}(x) = \mathbf{n}(y(x))$ a $|x - y(x)| = \eta$ pro všechna $x \in \partial\Omega$. Navíc existuje funkce $\kappa \in W^{1,\infty}(\Omega)$ taková, že $\kappa(x) = 1$ pro $x \in \Omega_\eta$, $\kappa(x) = 0$ pro $x \in \Omega\setminus\Omega_{\frac{\eta}{2}}$, $|\nabla\kappa| \le \frac{c}{\eta}$ pro $x \in \Omega_{\frac{\eta}{2}}\setminus\Omega_\eta$ a $\frac{\partial\kappa}{\partial\tau}\Big|_{\partial\Omega_\eta} = 0$, kde τ je tečný jednotkový vektor k hranici.*

Nechť $\eta > 0$ a $\kappa \in W^{1,\infty}(\Omega)$ je taková funkce, že $|supp\,(1-\kappa)| \le \eta$. Pak

$$\int_{V_a(t)} \varphi(s-t)\rho(s)\mathbf{f}\cdot\mathbf{v}_{\epsilon kh}\,dxds = \int_{V_a(t)} \varphi(s-t)\rho(s)\mathbf{f}\cdot\mathbf{v}_{\epsilon kh}\kappa\,dxds$$
$$+ \int_{V_a(t)} \varphi(s-t)\rho(s)\mathbf{f}\cdot\mathbf{v}_{\epsilon kh}(1-\kappa)\,dxds =: J_1^h + J_2^h. \tag{4.125}$$

Snadno ověříme, že

$$|J_2^h| \le ca\|\rho\|_{L^\infty(0,\infty;L_{\Phi_1}(\Omega))}\|\mathbf{f}\|_\infty\|\mathbf{v}_{\epsilon kh}\|_{L^\infty(0,\infty;L^\infty(\Omega))}\|\chi_{supp(1-\kappa)}\|_M \le c(\eta),$$

kde $c(\eta) \to 0$ pro $\eta \to 0$.

Protože dvojice $(\rho, \mathbf{u})$ je slabé řešení úlohy (4.83)–(4.87), můžeme přepsat integrál J_1^h následujícím způsobem

$$J_1^h = \int_{t-a}^{t+a} \varphi(s-t)\int_\Omega \Big(P(\mathbf{u}) : D(\kappa\mathbf{v}_{\epsilon kh}) - \rho\mathrm{div}\,(\kappa\mathbf{v}_{\epsilon kh})$$

$$-\rho\mathbf{u}\cdot((\mathbf{u}\cdot\nabla)(\kappa\mathbf{v}_{\epsilon kh}))-\rho\mathbf{u}\kappa(\mathbf{v}_{\epsilon kh})_t\Big)\,dxds$$

$$-\int_{t-a}^{t+a}\varphi'(s-t)\int_\Omega \kappa\rho\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}_{\epsilon kh}\,dxds$$

$$=\int_{t-a}^{t+a}\varphi(s-t)\int_\Omega\Big(\kappa P(\mathbf{u}):D\mathbf{v}_{\epsilon kh}$$

$$-\kappa\rho\mathbf{u}\cdot((\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{v}_{\epsilon kh})-\rho\mathbf{u}\kappa(\mathbf{v}_{\epsilon kh})_t\Big)\,dxds$$

$$-\int_{t-a}^{t+a}\varphi'(s-t)\int_\Omega \kappa\rho\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}_{\epsilon kh}\,dxds$$

$$+\int_{t-a}^{t+a}\varphi(s-t)\int_\Omega\Big(P(\mathbf{u}):Sym(\nabla\kappa\otimes\mathbf{v}_{\epsilon kh})$$

$$-\rho(\mathbf{u}\cdot\nabla\kappa)(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}_{\epsilon kh})-\rho\nabla\kappa\cdot\mathbf{v}_{\epsilon kh})\Big)\,dxds=:\sum_{i=1}^{7}\overline{J}_i^h, \tag{4.126}$$

kde Sym znamená symetrickou část tenzoru. Integrály $\overline{J}_1^h,\dots,\overline{J}_4^h$ můžeme odhadnout pomocí funkce $c\Delta(h)\sigma_a(t)$ a integrály $\overline{J}_5^h$ a $\overline{J}_6^h$ funkcí $\frac{c}{\eta}\sigma_a(t)$. Zbývá odhadnout integrál $\overline{J}_7^h$.

Nechť z daného bodu $x\in\Omega_{\eta/2}\backslash\Omega_\eta$ vychází polopřímka, která je normálou k hranici $\partial\Omega_\eta$ v bodě x_1 a k $\partial\Omega$ v bodě x_2. Pak $|x-x_2|\le\eta$. Protože $\mathbf{v}_{\epsilon kh}(x_2)\cdot\mathbf{n}(x_2)=0$, $\mathbf{n}(x_2)=\mathbf{n}(x_1)$ a $\nabla\kappa(x_1)\perp\tau(x_2)$, z Tvrzení 4.15 pak dostáváme $\nabla\kappa(x)\cdot\mathbf{v}_{\epsilon kh}(x_2)=0$. Můžeme tedy zkonstruovat oblast Ω_α, kde $\alpha=|x-x_2|$ a použitím stejných výsledků jako v Tvrzení 4.15 pro Ω_η ukážeme, že $\nabla\kappa(x)\cdot\tau(x)=0$ pro libovolný vektor τ, který je tečnou k $\partial\Omega_\alpha$ v bodě x. Z lipschitzovskosti funkce $\mathbf{v}_{\epsilon kh}$ vyplývá

$$|\nabla\kappa(x)\cdot\mathbf{v}_{\epsilon kh}(x)|=|\nabla\kappa(x)\cdot(\mathbf{v}_{\epsilon kh}(x)-\mathbf{v}_{\epsilon kh}(x_2))|$$

$$\le\frac{c}{\eta}\eta\|\mathbf{v}_{\epsilon kh}\|_{L^\infty(0,\infty;W^{1,\infty}(\Omega))}\le c\Delta(h).$$

Výše uvedená nerovnost pak umožňuje odvodit odhad

$$\left|\int_{V_a(t)}\rho\nabla\kappa\cdot\mathbf{v}_{\epsilon kh}\,dxds\right|\le\Delta(h)\|\rho\|_{L^\infty(0,\infty;L_{\Phi_1}(\Omega))}\|\chi_{\Omega_{\eta/2}\backslash\Omega_\eta}\|_M. \tag{4.127}$$

Spojíme-li výše uvedené odhady dohromady, pak dostáváme

$$|J_1^h + J_2^h| \leq c(\eta) + c\Delta(h)\sigma_a(t) + c\Delta(h)w(\eta) + \frac{c}{\eta}\sigma_a(t), \tag{4.128}$$

kde $w(\eta) \to 0$ pro $\eta \to 0+$. Odtud

$$\limsup_{t\to\infty} \limsup_{\epsilon\to 0} |I^{\epsilon}_{6kh}(t)| \leq \delta_2(h) + w(\eta)\Delta(h),$$

pro $\delta_2(h) \to 0$ pro $h \to 0$ a $w(\eta) \to 0$ pro $\eta \to 0$.

Dokázali jsme tedy

$$0 \leq Q_k(t) \leq \lim_{n\to\infty} Q^{\epsilon_n}_{ak}(t)$$

$$\leq c\left(1 + \Delta(h) + k + \frac{1}{\eta}\right)\sigma_a(t) + w(\eta)\Delta(h) + \delta_1(k) + \delta_2(h)$$

a nerovnost (4.116) je tedy splněna díky vhodné volbě η a h. □

4.2.5 Konvergence hustoty

Lemma 4.16 *Nechť $q \in W^{1,1}_{loc}(a,\infty)$, $a \in \mathbb{R}^+_0$, je taková funkce, že $q(s) \geq 0$ pro $s \geq a$ a $\limsup_{t\to\infty} \int_{t-1}^t (q(s) + |q'(s)|)\, ds \leq \delta_1(k)$. Pak*

$$\limsup_{t\to\infty} q(t) \leq \delta_1(k). \tag{4.129}$$

D ů k a z: Důkaz plyne ihned z nerovnosti (viz. [24])

$$q(t) \leq \int_{t-1}^t (q(s)+|q'(s)|)\, ds.$$

□

Položme

$$q_k(t) := \|\theta(\rho(t)) - \theta(\overline{\rho}_k(t))\|_2^2,\ t > 1\,. \tag{4.130}$$

Pak z Tvrzení 4.12 vyplývá, že

$$\int_{t-1}^t q_k(s)\ ds \leq Q_k(t)$$

a tedy

$$\limsup_{t\to\infty} \int_{t-1}^t q_k(s)\ ds \leq \delta_1(k). \tag{4.131}$$

Zbývá ukázat, že

$$\lim_{t\to\infty}\int_{t-1}^{t} |q_k'(s)|\ ds = 0,$$

což je důsledkem následujícího lemma.

Lemma 4.17

$$\sqrt{\int_{t-1}^{t}\left|\frac{d}{ds}\|\theta(\rho(s))-\theta(\overline{\rho}_k(s))\|_2^2\right|^2\ ds} \le ck\sqrt{\sigma(t)}, \tag{4.132}$$

kde

$$\sigma(t) := \max\left\{\int_{t-1}^{t}\|D\mathbf{u}(s)\|_{\Psi_2}\ ds,\ \int_{t-1}^{t}\|D\mathbf{u}(s)\|_{\Psi_2}^2\ ds,\right.$$
$$\left.\int_{t-1}^{t}\|P(\mathbf{u})(s)\|_{\overline{M}}\ ds\right\}.$$

D ů k a z: Stačí ověřit, že

$$\left|\int_{t-1}^{t}\eta'(s)\int_\Omega(\theta(\rho(s))-\theta(\overline{\rho}_k(s)))^2\ dxds\right| \le ck\|\eta\|_{L^2(t-1,t)}\sqrt{\sigma(t)} \tag{4.133}$$

pro libovolné $\eta\in C_0^\infty(t-1,t)$. Nejprve z renormalizované rovnice kontinuity dostáváme odhad

$$\left|\int_{t-1}^{t}\eta'(s)\int_\Omega\theta(\rho)^2\ dxds\right| \le \left|\int_{t-1}^{t}\eta(s)\int_\Omega(2\rho\theta(\rho)\theta'(\rho)-\theta(\rho)^2)\mathrm{div}\,\mathbf{u}\ dxds\right|$$
$$\le c\int_{t-1}^{t}|\eta(s)|\int_\Omega|\mathrm{div}\,\mathbf{u}|\ dxds \le c\|\eta\|_{L^2(t-1,t)}\sqrt{\sigma(t)}.$$

Dále

$$\left|\int_{t-1}^{t}\eta'(s)\int_\Omega\theta(\rho)\theta(\overline{\rho}_k)\ dxds\right| = \left|-\int_{t-1}^{t}\eta(s)\int_\Omega\theta(\rho)\left(\mathbf{u}\cdot\nabla\theta(\overline{\rho}_k)\right)\ dxds\right.$$
$$\left.+\int_{t-1}^{t}\eta(s)\int_\Omega\theta(\rho)\theta(\overline{\rho}_k)_t\ dxds - \int_{t-1}^{t}\eta(s)\int_\Omega(\rho\theta'(\rho)-\theta(\rho))\theta(\overline{\rho}_k)\mathrm{div}\,\mathbf{u}\ dxds\right|$$
$$\le c\Bigg(\int_{t-1}^{t}|\eta(s)|\|\mathbf{u}(s)\|_\infty\int_\Omega|\nabla\theta(\overline{\rho}_k)|\ dxds + \int_{t-1}^{t}|\eta(s)|\int_\Omega|\theta(\overline{\rho}_k)_t|\ dxds$$

$$+\int_{t-1}^{t} |\eta(s)| \int_\Omega |\mathrm{div}\, \mathbf{u}| \; dxds\Bigg)$$

$$\leq c\|\eta\|_{L^2(t-1,t)}\left(\sqrt{\int_{t-1}^{t} \|\mathbf{u}(s)\|_\infty^2 \left(\int_\Omega |\nabla\theta(\overline{\rho}_k)| \; dx\right)^2 \; ds}\right.$$

$$\left. +\|\theta(\overline{\rho}_k)_t\|_{L^2(t-1,t;L^1(\Omega))} + \sqrt{\sigma(t)}\right) =: I_1 + I_2 + I_3.$$

Integrál I_1 pak s pomocí (4.100) a definice seřezávací funkce odhadneme takto

$$I_1 \leq ck\|\rho\|_{L^\infty(0,\infty;L^1(\Omega))}\sqrt{\sigma(t)}.$$

Nyní ukážeme, že pokud odhadneme integrál I_2, pak máme i odhad poslední části, kterou dostaneme po umocnění z (4.133), neboť

$$\int_{t-1}^{t} \eta'(s) \int_\Omega \theta(\overline{\rho}_k)^2 \; dxds = \lim_{\epsilon_n \to 0+} \int_{t-1}^{t} \eta'(s) \int_\Omega \theta(\overline{\rho}_{\epsilon_n k})^2 \; dxds. \tag{4.134}$$

Odtud plyne, že stačí odhadnout pravou stranu. Tedy

$$\left|\int_{t-1}^{t} \eta'(s) \int_\Omega \theta(\overline{\rho}_{\epsilon_n k})^2 \; dxds\right| = 2\left|\int_{t-1}^{t} \eta(s) \int_\Omega \theta(\overline{\rho}_{\epsilon_n k})\theta(\overline{\rho}_{\epsilon_n k})_t \; dxds\right|$$

$$\leq c\int_{t-1}^{t} |\eta(s)|\|\theta(\overline{\rho}_{\epsilon_n k})_t(s)\|_1 \; ds \leq \|\eta\|_{L^2(t-1,t)}\|\theta(\overline{\rho}_{\epsilon_n k})_t\|_{L^2(t-1,t;L^1(\Omega))}. \tag{4.135}$$

Z (4.113), (4.114), (4.123) a z odhadu funkce $m'_{\epsilon k}(s)$ v prostoru $L^2(t-1,t)$ pro $t > 1$ (viz. Lemma 4.13) vyplývá, že

$$\|\theta(\overline{\rho}_{\epsilon_n k})_t\|_{L^2(t-1,t;L^1(\Omega))} \leq ck\sqrt{\sigma(t)},$$

neboť $\int_{t-1}^{t} \frac{1}{\epsilon^2}\phi_0(s/\epsilon) \; ds \to 0$ pro $\epsilon \to 0$ a $t > 1$. □

Lemma 4.18 *Pro* $r \in [1, \infty)$

$$\limsup_{t\to\infty} \|\theta(\rho(t)) - \theta(\overline{\rho}_k(t))\|_r \leq c\delta_1(k). \tag{4.136}$$

D ů k a z: Důkaz ihned plyne z omezenosti funkce θ. □

Následující lemma nám umožňuje udělat přechod $k \to \infty$.

Lemma 4.19 *Za výše uvedených předpokladů platí, že limita*

$$\lim_{t\to\infty} \|\theta(\rho(t)) - \theta(\overline{\rho}(t))\|_r = 0 \tag{4.137}$$

pro každé $r \in [1,\infty)$, *kde* $\overline{\rho} := \overline{w}+\overline{m}$ *a* $\overline{w}$ *a* $\overline{m}$ *jsou limitní stavy posloupnosti funkcí* $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ *a* $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$.

D ů k a z: Použijeme-li stejnou techniku odhadu jako v nerovnosti (4.114), dostaneme

$$\|w_{k_1}(s) - w_{k_2}(s)\|_r \le c\|T_{k_1}(\rho(s)) - T_{k_2}(\rho(s))\|_1 \tag{4.138}$$

pro $r \in \left[1, \frac{N}{N-1}\right)$ a skoro všechna $s > 0$, kde w_{k_i}, $i = 1, 2$, jsou řešení úlohy (4.99). Z nerovnosti (4.138) v důsledku Lemma 1.43 vyplývá, že posloupnost $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ je cauchyovská a tedy konvergentní v $L^\infty(0,\infty; L^r(\Omega))$ pro $r \in [1, \frac{N}{N-1})$. Označme její limitu $\overline{w}$, $\overline{w} \in L^\infty(0,\infty; L^r(\Omega))$. Z (4.104) plyne následující rovnost

$$\int_\Omega \theta(w_{\epsilon k}(s) + m_{\epsilon k}(s)) - \theta(w_{\epsilon k+q}(s) + m_{\epsilon k+q}(s))\, dx = 0$$

pro s.v. $s > 0$ a pro každé $q \in \mathbb{N}_0$. Po limitním přechodu $\epsilon \to 0$ dostaneme

$$\int_\Omega \theta(w_k(s) + m_k(s)) - \theta(w_{k+q}(s) + m_{k+q}(s)) = 0 \text{ pro s.v. } s > 0$$

a odtud plyne, že

$$\lim_{k\to\infty} \sup \int_\Omega \theta(w_k(s) + m_k(s))\, dx = \lim_{k\to\infty} \inf \int_\Omega \theta(w_k(s) + m_k(s))\, dx$$

pro s.v. $s > 0$. Z této nerovnosti lze sporem odvodit, že

$$\lim_{k\to\infty} \sup m_k(s) = \lim_{k\to\infty} \inf m_k(s)$$

a tedy $\lim_{k\to\infty} m_k(s) = \overline{m}(s) < \infty$ pro s.v. $s > 0$. Jestliže chceme dokázat (4.137), pak musíme ukázat, že $m_k \to \overline{m}$ v prostoru $L^\infty(0,\infty)$. Důkaz této konvergence je založen na sporu. Předpokládejme, že pro každé k_0 existuje $k \ge k_0$ takové, že $\|m_k - \overline{m}\|_{L^\infty(0,\infty)} \ge \delta > 0$. Pak z rovnosti

$$\left\| \int_\Omega \theta(w_{k_1}(\cdot) + m_{k_1}(\cdot))\, dx - \int_\Omega \theta(w_{k_2}(\cdot) + m_{k_2}(\cdot))\, dx \right\|_{L^\infty(0,\infty)} = 0$$

pro každé $k_1, k_2 = 1, 2, \ldots$, z konvergence skoro všude a z Lebesgueovy věty aplikované na předchozí identity dostáváme

$$\left\| \int_\Omega \theta(w_k(\cdot) + m_k(\cdot))\, dx - \int_\Omega \theta(\overline{w}(\cdot) + \overline{m}(\cdot))\, dx \right\|_{L^\infty(0,\infty)} = 0.$$

Odtud

$$\begin{aligned}
0 &= \left\| \int_\Omega \theta(w_k(\cdot) + m_k(\cdot)) - \theta(\overline{w}(\cdot) + \overline{m}(\cdot))\, dx \right\|_{L^\infty(0,\infty)} \\
&= \Bigg\| \int_\Omega \left(\int_0^1 \theta'(\alpha(w_k(\cdot) + m_k(\cdot)) + (1-\alpha)(\overline{w}(\cdot) + \overline{m}(\cdot)))\, d\alpha \right) \times \\
&\qquad (w_k(\cdot) + m_k(\cdot) - \overline{w}(\cdot) - \overline{m}(\cdot))\, dx \Bigg\|_{L^\infty(0,\infty)} \\
&= \Bigg\| \int_\Omega \left(\int_0^1 \theta'(\alpha(w_k + m_k) + (1-\alpha)(\overline{w} + \overline{m}))\, d\alpha \right) (w_k - \overline{w})\, dx \\
&\quad + \int_{\Omega_{\sigma\cdot}} \left(\int_0^1 \theta'(\alpha(w_k + m_k) + (1-\alpha)(\overline{w} + \overline{m}))\, d\alpha \right) (m_k - \overline{m})\, dx \\
&\quad + \int_{\Omega \setminus \Omega_{\sigma\cdot}} \left(\int_0^1 \theta'(\alpha(w_k + m_k) + (1-\alpha)(\overline{w} + \overline{m}))\, d\alpha \right) (m_k - \overline{m})\, dx \Bigg\|_{L^\infty(0,\infty)} \\
&= \|I_1^k(\cdot) + I_2^k(\cdot) + I_3^k(\cdot)\|_{L^\infty(0,\infty)} \\
&\geq \|I_2^k(\cdot)\|_{L^\infty(0,\infty)} - \|I_1^k(\cdot)\|_{L^\infty(0,\infty)} - \|I_3^k(\cdot)\|_{L^\infty(0,\infty)},
\end{aligned}$$

kde $\Omega_{\sigma s} := \{x \in \Omega;\ |w_k(x,s) - \overline{w}(x,s)| \leq \sigma\}$. Poněvadž z (4.138) plyne konvergence funkcí w_k v prostoru $L^\infty(0,\infty; L^r(\Omega))$ pro $r \in \left[1, \frac{N}{N-1}\right)$, dostáváme

$$\operatorname*{ess\,inf}_{s \in (0,\infty)} |\Omega_{\sigma s}| \geq \delta_3(\sigma) \text{ a } \operatorname*{ess\,sup}_{s \in (0,\infty)} |\Omega \setminus \Omega_{\sigma s}| \leq \delta_4(\sigma),$$

kde $\delta_i > 0$, $i = 3, 4$, a navíc $\delta_3(\sigma) \to |\Omega|$ a $\delta_4(\sigma) \to 0$ pro $\sigma \to 0$. Odvození druhé nerovnosti je zřejmé, protože pokud by to nebyla pravda, pak posloupnost $\{w_k\}_{k=1}^\infty$ nemůže konvergovat v $L^\infty(0,\infty; L^r(\Omega))$, pro $r \in [1, \frac{N}{N-1})$. Důkaz první nerovnosti je založen na stejné myšlence. Navíc platí

$$\begin{aligned}
|\Omega_{\sigma s}| &= |\Omega \setminus (\Omega \setminus \Omega_{\sigma s})| = |\Omega| - |\Omega \setminus \Omega_{\sigma s}| \\
&\geq |\Omega| - \delta_4(\sigma) =: \delta_3(\sigma).
\end{aligned}$$

Užitím omezenosti $\theta'(r)$ dostaneme, že $\|I_1^k(\cdot)\|_{L^\infty(0,\infty)} \to 0$. Dále je vidět, že

$$\|I_3^k(\cdot)\|_{L^\infty(0,\infty)} \leq c\| \, |\Omega \setminus \Omega_{\sigma\cdot}| \, \|_{L^\infty(0,\infty)} \leq c\delta_4(\sigma),$$

což plyne z omezenosti θ', $m_k(s)$ a $\overline{m}(s)$. To znamená, že $\|I_3^k(\cdot)\|_{L^\infty(0,\infty)}$ je libovolně malý pro k dostatečně velké. Ale

$$\left\| \int_{\Omega_{\sigma\cdot}} \int_0^1 \theta'(\alpha(w_k + m_k) + (1-\alpha)(\overline{w} + \overline{m})) \, d\alpha (m_k - \overline{m}) \, dx \right\|_{L^\infty(0,\infty)}$$

$$> c\|m_k - \overline{m}\|_{L^\infty(0,\infty)} > c\delta > 0,$$

pro $k \to \infty$, protože $\theta'(z) > 0$ a tedy i

$$\int_{\Omega_{\sigma s}} \int_0^1 \theta'(\alpha(w_k + m_k) + (1-\alpha)(\overline{w} + \overline{m})) \, d\alpha dx > c > 0$$

pro s.v. $s \in (0, \infty)$. Odtud vyplývá

$$0 \geq \lim_{k \to \infty} \|I_2^k\|_\infty - \|I_1^k\|_\infty - \|I_3^k\|_\infty > c\delta > 0,$$

což je spor. Dále již snadno ověříme, že

$$\lim_{t \to \infty} \|\theta(\rho(t)) - \theta(\overline{\rho}(t))\|_r = 0$$

pro každé $r \in [1, \infty)$, kde $\overline{\rho} = \overline{w} + \overline{m}$. $\square$

Věta 4.20 *Předpokládejme, že předpoklady z kapitoly* 5.2.2 *jsou splněny. Pak existuje jediná funkce* $\rho_\infty \in L_{\Phi_1}(\Omega)$ *taková, že*

$$\lim_{t \to \infty} \|\rho(t) - \rho_\infty\|_\Phi = 0. \tag{4.139}$$

Funkce Φ *je Youngova funkce s vlastností, že pro její komplementární funkci* Ψ *platí, že*

$$\int_\Omega \Psi_1(|w|^{\frac{1}{\alpha}}) \, dx \leq c$$

pro libovolné w *takové, že* $\int_\Omega \Psi(w) \, dx \leq 1$, *a pro libovolné ale pevně zvolené* $\alpha \in (0, 1)$. *Rovnovážný stav hustoty* ρ_∞ *navíc splňuje rovnice* (4.89) *a* (4.90).

D ů k a z: Nechť $t_n \to \infty$ je libovolná posloupnost. Pak vybereme podposloupnost $\{s_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ takovou, že $\rho(s_n) \overset{\Psi_1}{\rightharpoonup} \rho_\infty$. Dále $\overline{w}(s_n) \to w_\infty$ v $L^r(\Omega)$ pro $r \in \left[1, \frac{N}{N-1}\right)$, což je důsledek Lemma 1.43, Lemma 1.44 a následujícího odhadu

$$\int_\Omega (\overline{w}(s_n) - \overline{w}(s_m))\Delta\xi \; dx = \int_\Omega (\rho(s_n) - \rho(s_m))\mathbf{f} \cdot \nabla\xi \; dx$$
$$\leq \|\mathbf{f}\|_{1,\infty} \|\rho(s_n) - \rho(s_m)\|_{-1,r} \|\nabla\xi\|_{1,r'}$$

pro $r' > N$. Odhad je proveden analogicky jako v (4.114). Navíc $\overline{m}(s_n) \to m_\infty$. Z (4.137) dostaneme, že $\theta(\rho(s_n)) - \theta(\overline{\rho}(s_n)) \to 0$ s.v. v Ω. Odtud $\theta(\overline{\rho}(s_n)) \to \theta(w_\infty + m_\infty)$, $\theta(\rho(s_n)) \to \theta(w_\infty + m_\infty)$ s.v. v Ω a tedy $\rho(s_n) \to w_\infty + m_\infty$ s.v. v Ω. Z omezenosti $\|\rho(s_n)\|_{\Phi_1}$ (s použitím konvergence podle míry) a z následujícího odhadu

$$\int_\Omega uw \; dx = \int_\Omega u^{1-\alpha} u^\alpha w \; dx \leq \|u\|_1^{1-\alpha} \left(\int_\Omega \Phi_1(u) \; dx + \int_\Omega \Psi_1(|w|^{\frac{1}{\alpha}}) \; dx \right)^\alpha$$

pro $\alpha \in (0,1)$ vyplývá konvergence $\rho(s_n)$ v prostoru $L_\Phi(\Omega)$, kde komplementární funkce Ψ splňuje nerovnost z předpokladů této věty. Odtud plyne, že $\rho_\infty = w_\infty + m_\infty$. Z konvergence funkcí $\rho(s_n)$ k ρ_∞ pak dostaneme

$$\int_\Omega \rho_\infty \Delta\xi \; dx = \int_\Omega (w_\infty + m_\infty)\Delta\xi \; dx = \int_\Omega \rho_\infty \mathbf{f} \cdot \nabla\xi \; dx$$

pro funkci ξ z Helmholz-Weylova rozkladu funkce $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$, t.j. $\eta = \nabla\xi + \mathbf{z}$. Jelikož

$$\int_\Omega \rho_\infty \operatorname{div} \mathbf{z} \; dx = 0,$$

zbývá ověřit, že $\int_\Omega \rho_\infty \mathbf{f} \cdot \mathbf{z} \; dx = 0$. Je jasné, že důkaz bude úplný, když ukážeme, že

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \rho(s_n)\mathbf{f} \cdot \mathbf{z} \; dx = 0 \tag{4.140}$$

pro $\mathbf{z} \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $\operatorname{div} \mathbf{z} = 0$ a $\mathbf{z} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0$, protože potom $0 = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \rho(s_n)\mathbf{f} \cdot \mathbf{z} \; dx = \int_\Omega \rho_\infty \mathbf{f} \cdot \mathbf{z} \; dx$. Abychom ověřili (4.140) je nutné dokázat, že

$$\int_{t-1}^t \left| \int_\Omega \rho(s)\mathbf{f} \cdot \mathbf{z} \; dx \right| ds \to 0 \tag{4.141}$$

a

$$\left|\int_{t-1}^{t}\varphi'(s)\int_\Omega \rho(s)\mathbf{f}\cdot\mathbf{z}\;dxds\right| \to 0 \text{ pro } t\to\infty \tag{4.142}$$

a $\varphi \in C_0^\infty(t-1,t)$. Tedy ze slabé formulace (4.84) plyne

$$\int_{t-a}^{t+a}|\upsilon(s)|\left|\int_\Omega \rho(s)\mathbf{f}\cdot\mathbf{z}\;dx\right|ds \le c\|\upsilon\|_\infty\|P\mathbf{u}\|_{L^1(t-a,t+a;L_{\overline{M}}(\Omega))}\|\nabla\mathbf{z}\|_\infty$$

$$+c\|\nabla\mathbf{z}\|_\infty\|\upsilon\|_\infty\|\rho\|_{L^\infty(0,\infty;L_{\Phi_1}(\Omega))}\int_{t-a}^{t+a}\|D\mathbf{u}(s)\|_{\Psi_2}^2\;ds$$

$$+\|\mathbf{z}\|_\infty\int_{t-a}^{t+a}|\upsilon'(s)|\|\rho\mathbf{u}(s)\|_1\;ds \to 0$$

pro $t\to\infty$ a funkci $\upsilon\in C_0^\infty(t-a,t+a)$ takovou, že $\upsilon(s)\equiv 1$ pro $s\in[t-1,t]$, což dává (4.141). Dále ze slabé formulace rovnice kontinuity vyplývá, že

$$\left|\int_{t-1}^{t}\varphi'(s)\int_\Omega \rho(s)\mathbf{f}\cdot\mathbf{z}\;dxds\right| = \left|\int_{t-1}^{t}\varphi(s)\int_\Omega \rho(s)(\mathbf{u}(s)\cdot\nabla(\mathbf{f}\cdot\mathbf{z}))\;dxds\right|$$

$$\le c\|\mathbf{f}\|_{1,\infty}\|\mathbf{z}\|_{1,\infty}\|\varphi\|_{L^2(t-1,t)}\sqrt{\sigma(t)}.$$

Odtud s použitím Lemma 4.16 pro $\delta_1(k)=0$ dostaneme požadovaný výsledek.

Ukázali jsme, že

$$\int_\Omega \rho_\infty \operatorname{div}\eta\;dx = \int_\Omega \rho_\infty\mathbf{f}\cdot\eta\;dx,\;\; \eta\in C_0^\infty(\Omega). \tag{4.143}$$

Vezmeme nyní funkci $\eta_i\in C_0^\infty(\Omega)$ $(\eta=(\eta_1,\dots,\eta_n))$ pro libovolné ale pevné i a $\eta_j\equiv 0$ pro $j\neq i$, kde $\eta=(\eta_1,\dots,\eta_n)$. Pak zřejmě existuje derivace ve smyslu distribucí funkce ρ_∞ a tedy

$$\nabla\rho_\infty = \rho_\infty\mathbf{f} \text{ s.v. v } \Omega \tag{4.144}$$

$$\int_\Omega \rho_\infty\;dx = \int_\Omega \rho_0\;dx. \tag{4.145}$$

K důkazu jednoznačnosti můžeme použít myšlenku z [6], t.j. předpokládáme existenci dvou řešení úlohy (4.144) a (4.145) a odvodíme

$$\nabla(\ln(|\rho_1-\rho_2|)) = \nabla g$$

na oblastech, kde $|\rho_1 - \rho_2| \neq 0$. Odtud

$$|\rho_1(x) - \rho_2(x)| = e^k e^{g(x)},$$

kde $g \in L^\infty(\Omega)$ a k je konečná konstanta, která závisí na souvislých podoblastech, kde $|\rho_1 - \rho_2| \neq 0$. To ale vede ke sporu buď s nulou na hranici těchto oblastí nebo s (4.145) díky spojitosti funkce ρ_∞ na Ω.

5 Stabilizace řešení Navierových-Stokesových rovnic a rychlost konvergence k rovnovážnému stavu

5.1 Úvod

V této kapitole budeme studovat trošku odlišný model reprezentující proudění stlačitelných tekutin a z tohoto důvodu mu budeme věnovat samostatný prostor. Budeme se opět zabývat stabilizací a rychlostí konvergence k rovnovážnému stavu pro řešení následujících rovnic popisujících proudění stlačitelné tekutiny ve dvou dimenzích

$$\rho\,(u_t + uu_x + vu_y) - 2\mu u_{xx} - \mu(u_y + v_x)_y + p(\rho)_x - (\lambda(\rho)\mathrm{div}\,\mathbf{u})_x = 0, \tag{5.1}$$
$$\rho\,(v_t + uv_x + vv_y) - 2\mu v_{yy} - \mu(u_y + v_x)_x + p(\rho)_y - (\lambda(\rho)\mathrm{div}\,\mathbf{u})_y = 0,$$

$$\rho_t + \mathrm{div}\,(\rho\mathbf{u}) = 0 \tag{5.2}$$

pro $(x,y) \in \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 < x < 1,\ 0 < y < 1\}$ a $t \in (0,T)$. Co se týče označení, pak značíme $\mathbf{u} = (u,v)$ rychlostní vektor, $z = (x,y)$ a $dz = dxdy$. Tyto rovnice doplníme počátečními a okrajovými podmínkami ve tvaru

$$u(0,y,t) = u(1,y,t) = v_x(0,y,t) = v_x(1,y,t) = 0, \tag{5.3}$$
$$v(x,0,t) = v(x,1,t) = u_y(x,0,t) = u_y(x,1,t) = 0$$

a

$$\rho(x,y,0) = \rho_0(x,y), \tag{5.4}$$

$$\mathbf{u}(x,y,0) = \mathbf{u}_0(x,y) \tag{5.5}$$

pro $(x,y) \in \Omega$.

5.2 Základní předpoklady

Celou úlohu (5.1)–(5.5) doplníme dalšími předpoklady, pro něž lze ukázat existenci klasického řešení úlohy (5.1)–(5.5). Tyto předpoklady mají podobu

1. $\lambda(\rho) = \rho^\beta$ pro $\beta > 3$, $p(\rho) = \rho^\gamma$ pro $\gamma \geq \beta$, $\mu = 1$;

2. $\rho_0 \in C^{1+\alpha}(\overline{\Omega})$, $\mathbf{u}_0 \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$, kde $\alpha \in (0,1)$;

3. $0 < m_0 \leq \rho_0(x,y) \leq M_0 < +\infty$ pro $(x,y) \in \Omega$;

4.
$$u_0\Big|_{x=0} = u_0\Big|_{x=1} = \frac{\partial v_0}{\partial x}\Big|_{x=0} = \frac{\partial v_0}{\partial x}\Big|_{x=1} = 0,$$
$$v_0\Big|_{y=0} = v_0\Big|_{y=1} = \frac{\partial u_0}{\partial y}\Big|_{y=0} = \frac{\partial u_0}{\partial y}\Big|_{y=1} = 0,$$
$$[2\mu(u_0)_{xx} + (\lambda(\rho_0)\mathrm{div}\,\mathbf{u}_0)_x + \mu((u_0)_y + (v_0)_x)_y - (p(\rho_0))_x]_{x=0,\,x=1} = 0,$$
$$[2\mu(v_0)_{yy} + (\lambda(\rho_0)\mathrm{div}\,\mathbf{u}_0)_y + \mu((u_0)_y + (v_0)_x)_x - (p(\rho_0))_y]_{y=0,\,y=1} = 0.$$

Důkaz existence klasického řešení pro úlohu (5.1)–(5.5) za výše uvedených podmínek ukázal V. A. Kažichov a V. A. Vajgant v [11]. Tento existenční výsledek můžeme shrnout do věty

Věta 5.1 [11] *Nechť jsou splněny předpoklady* 1.–4.. *Pak existuje jediné klasické řešení úlohy* (5.1)–(5.5) *na* Q_T *takové, že*

$$\mathbf{u} \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q}_T)^N, \ \rho \in C^{1+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q}_T) \ \textit{pro } \alpha \in (0,1).$$

Dále existují konstanty m_1 *a* M_1 *s vlastností, že*

$$0 < m_1 \leq \rho(x,y,t) \leq M_1 < +\infty \ \textit{pro } (x,y,t) \in \overline{Q}_T \tag{5.6}$$

a toto řešení splňuje energetickou nerovnost

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \left(\frac{1}{2}\rho|\mathbf{u}|^2 + \frac{\rho^\gamma}{\gamma-1}\right)\, dz + \int_\Omega \Big(|\nabla\mathbf{u}|^2 + \rho^\beta|\mathrm{div}\,\mathbf{u}|^2\Big) dz \leq 0 \tag{5.7}$$

pro $\gamma > 1$ (viz. [11, str. 1114, 1116]).

Poznámka 5.2 Zřejmě řešení úlohy (5.1)–(5.5) vyhovuje také renormalizované rovnici kontinuity, t.j.

$$\theta(\rho)_t + \mathrm{div}\,(\theta(\rho)\mathbf{u}) + (\rho\theta'(\rho) - \theta(\rho))\mathrm{div}\,\mathbf{u} = 0,$$

kde $\theta \in C^1(\mathbb{R}_0^+)$ a θ, θ' jsou omezené funkce.

Stabilizací budeme rozumět, že pro dané řešení úlohy (5.1)–(5.5) splňující energetickou nerovnost (5.7) existuje konstanta $\rho_\infty > 0$ reprezentující rovnovážný stav hustoty taková, že

$$\lim_{t\to\infty} \|\rho(t) - \rho_\infty\|_q = 0 \text{ pro } q \in [1, \gamma) \tag{5.8}$$

a

$$\rho_\infty = \int_\Omega \rho_0 \; dz, \tag{5.9}$$

protože $|\Omega| = 1$.

5.3 Chování hustoty a rychlostního vektoru pro čas jdoucí k nekonečnu

Lemma 5.3 *Nechť dvojice* $(\rho, \mathbf{u})$ *je řešením úlohy* (5.1)–(5.5). *Potom hustota* $\rho \in L^\infty(0, \infty; L^\gamma(\Omega))$ *a rychlostní vektor spolu s hustotou splňuje nerovnosti*

$$\int_0^\infty \|\nabla \mathbf{u}(s)\|_2^2 \; ds < \infty$$

a

$$\int_0^\infty \int_\Omega \rho^\beta |\operatorname{div} \mathbf{u}|^2 \; dzds < \infty.$$

Z výše uvedených nerovností pak vyplývá

$$\lim_{t\to\infty} \int_{t-a}^{t+a} \|\nabla \mathbf{u}(s)\|_2^2 \; ds = 0 \tag{5.10}$$

a

$$\lim_{t\to\infty} \int_{t-a}^{t+a} \int_\Omega \rho^\beta |\operatorname{div} \mathbf{u}|^2 \; dzds = 0 \textit{ pro libovolné } a > 0. \tag{5.11}$$

D ů k a z: Tvrzení výše uvedeného lemmatu je důsledkem energetické nerovnosti (5.7). $\square$

5.4 Globálně stejnoměrné odhady

V této kapitole rychle projdeme důkaz stabilizace hustoty, neboť je totožný s důkazem v [24]. Hlavní myšlenka důkazu je také zmíněna v kapitole 5.2.4. Definujme

$$Q(t) := \int_{t-1}^t \int_\Omega (p(\rho(s)) - p(\overline{\rho}(s)))(\theta(\rho(s)) - \theta(\overline{\rho}(s))) \; dzds, \; t \geq 1, \tag{5.12}$$

kde $p(z) := z^\gamma$ pro $z \geq 0$ a $p(z) := -p(-z)$ pro $z < 0$.

Pak dostáváme z následujícího lemmatu informaci ohledně chování funkce $Q(t)$ pro čas $t \to \infty$.

Lemma 5.4 *Nechť* $\overline{\rho}_\epsilon$ *je funkce definovaná vztahem* (4.103) *pro "*$k = \infty$*". Pak pro limitu funkce* $Q(t)$ *definované prostřednictvím* (5.12) *platí, že*

$$\lim_{t\to\infty} Q(t) = 0. \tag{5.13}$$

D ů k a z: Nechť $a > 1$, $\varphi \in C_0^\infty(-a,a)$, $\varphi \geq 0$, $\varphi(\sigma) = 1$ pro $\sigma \in (-1,0)$. Položme opět

$$Q_a^\epsilon(t) := \int_{t-a}^{t+a} \varphi(s-t) \int_\Omega (p(\rho(s)) - p(\overline{\rho}_\epsilon(s)))(R_\epsilon(\theta(\rho(s))) - \theta(\overline{\rho}_\epsilon(s)))\ dzds.$$

Pak analogickým způsobem jako v kapitole 5.2.4 odvodíme s pomocí (5.1)

$$\int_{V_a(t)} \varphi(s-t)p(\rho(s))(R_\epsilon(\theta(\rho(s))) - \theta(\overline{\rho}_\epsilon(s)))\ dzds$$

$$= \int_{V_a(t)} \varphi(s-t)p(\rho(s))\mathrm{div}\,\psi_\epsilon(s)\ dzds$$

$$= \int_{V_a(t)} \varphi(s-t)\Big((-\rho\mathbf{u}(\psi_\epsilon(s))_t - \rho\mathbf{u}\cdot(\mathbf{u}\cdot\nabla)\psi_\epsilon(s) + 2u_x(\psi_\epsilon^1(s))_x$$

$$+2v_y(\psi_\epsilon^2(s))_y + 4D_{12}\mathbf{u}D_{12}\psi_\epsilon(s) + \rho^\beta \mathrm{div}\,\mathbf{u}\,\mathrm{div}\,\psi_\epsilon(s)\Big)\ dzds$$

$$- \int_{V_a(t)} \varphi'(s-t)\rho\mathbf{u}\psi_\epsilon(s)\ dzds, \tag{5.14}$$

kde $D_{12}\mathbf{u} = \frac{1}{2}(u_y + v_x)$ a $\psi_\epsilon = (\psi_\epsilon^1, \psi_\epsilon^2)$. Analogicky dostáváme

$$\int_{V_a(t)} \varphi(s-t)p(\overline{\rho}_\epsilon(s))(R_\epsilon(\theta(\rho(s))) - \theta(\overline{\rho}_\epsilon(s)))\ dzds = 0, \tag{5.15}$$

neboť $\mathbf{f} = 0$.

Odečtením (5.15) od (5.14) dostaneme vyjádření

$$\int_{V_a(t)} \varphi(s-t)(p(\rho(s)) - p(\overline{\rho}_\epsilon(s)))(R_\epsilon(\theta(\rho(s))) - \theta(\overline{\rho}_\epsilon(s)))\ dzds$$

$$= \int_{V_a(t)} \varphi(s-t)\left(2u_x(\psi_\epsilon^1(s))_x + 2v_y(\psi_\epsilon^2(s))_y\right)\ dzds$$

$$+ \int_{V_a(t)} \varphi(s-t)\rho^\beta \mathrm{div}\,\mathbf{u}\,(R_\epsilon\theta(\rho(s)) - \theta(\overline{\rho}_\epsilon(s)))\ dzds$$

$$+4\int_{V_a(t)} \varphi(s-t)D_{12}\mathbf{u}D_{12}\psi_\epsilon(s)\ dzds$$

$$-\int_{V_a(t)} \varphi(s-t)\rho\mathbf{u}\cdot(\mathbf{u}\cdot\nabla)\psi_\epsilon(s)\ dzds - \int_{V_a(t)} \varphi'(s-t)\rho\mathbf{u}\psi_\epsilon(s)\ dzds$$

$$-\int_{V_a(t)} \varphi(s-t)\rho\mathbf{u}(\psi_\epsilon(s))_t\ dzds =: \sum_{j=1}^{6} I_j^\epsilon. \tag{5.16}$$

Označme

$$\sigma_a(t) := \int_{t-a}^{t+a} \|\nabla\mathbf{u}(s)\|_2^2\ ds + \int_{t-a}^{t+a}\int_\Omega \rho^\beta |\mathrm{div}\,\mathbf{u}|^2\ dzds. \tag{5.17}$$

Jediný rozdíl pak oproti článku [24] spočívá v odhadu integrálu

$$|I_2^\epsilon(t)| \le \|\varphi\|_\infty \int_{V_a(t)} \rho^\beta |\mathrm{div}\,\mathbf{u}|\ dzds \le c\sigma_a(t). \qquad \square$$

Tvrzení 5.5 [24] *Za výše uvedených předpokladů platí odhad*

$$\int_1^\infty \left|\frac{d}{ds}\|\theta(\rho(s)) - \theta(\overline{\rho}(s))\|_2^2\right|\ ds \le c\int_1^\infty \|\nabla\mathbf{u}(t)\|_2^2\ dt < \infty. \tag{5.18}$$

Použití stejného postupu jako v důkazu analogické věty v [24] vede k následujícímu výsledku

Věta 5.6 *Nechť jsou splněny předpoklady* 1.–4.. *Pak platí*

$$\lim_{t\to\infty}\left\|\rho(t) - \int_\Omega \rho_0\ dx\right\|_q = 0 \text{ pro } q \in [1,\gamma). \tag{5.19}$$

5.5 Rychlost stabilizace pro čas jdoucí k nekonečnu

V této kapitole se budeme věnovat problému rychlosti konvergence limity (5.19) pro čas jdoucí k nekonečnu. Hlavní myšlenka důkazu je převzata z [31] a je zde modifikována pro dvou dimenzionální případ. Je zde třeba podotknout, že zde na rozdíl od [31] není splněna podmínka (5.6) nezávisle na čase t. Tedy je nutno připustit situaci, kdy $\rho(x,t) \to 0$ pro nějaké pevné x a $t \to \infty$. Hlavní výsledek této kapitoly lze shrnout do věty

Věta 5.7 *Nechť jsou splněny předpoklady* 1.–4. *z podkapitoly* 6.2. *Nechť navíc* $\gamma \in \mathbb{N}$ *a* $\gamma > \beta + 1$. *Pak platí následující odhad*

$$\|\rho(t) - \rho_\infty\|_2^2 + \int_\Omega \rho(t)|\mathbf{u}(t)|^2 \, dz + \|\mathbf{u}(t)\|_{2,\Omega_\delta(t)}^2$$

$$\leq c_{20} e^{-Kt} \left(\|\rho_0 - \rho_\infty\|_2^2 + \int_\Omega \rho_0 |\mathbf{u}_0|^2 \, dz \right) \tag{5.20}$$

pro konstanty $c_{20} = c_{20}(\delta)$ *a* K *nezávislé na čase* t, *které budou odvozeny během důkazu a pro* $\Omega_\delta(t) = \{x \in \Omega;\ \rho(x,t) \geq \delta > 0\}$.

D ů k a z: Jelikož $\frac{d}{dt}\int_\Omega \rho(x,t)\, dz = 0$ a ρ_∞ je konstanta, můžeme přepsat energetickou nerovnost na tvar

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \left(\frac{1}{2}\rho|\mathbf{u}|^2 + \Pi(\rho,\rho_\infty) \right) \, dz + \int_\Omega |\nabla \mathbf{u}|^2 + \rho^\beta |\operatorname{div} \mathbf{u}|^2 \, dz \leq 0\,, \tag{5.21}$$

kde funkce $\Pi(\rho,\rho_\infty) := \frac{\rho(\rho^{\gamma-1} - \rho_\infty^{\gamma-1})}{\gamma-1} - \rho\rho_\infty^{\gamma-1} + \rho_\infty^\gamma$ je taková funkce, pro kterou platí $\Pi(s,\rho_\infty) \geq 0$ (viz **III.** níže) pro libovolné $s \in [0,\infty)$. Vezměme funkci ψ, kde $\psi = (\psi^1, \psi^2)$, která je řešením úlohy

$$\operatorname{div} \psi(t) = \rho(t) - \rho_\infty,\ \psi(t)|_{\partial\Omega} = 0, \tag{5.22}$$

a splňuje odhad

$$\|\psi(t)\|_{1,2} \leq c\|\rho(t) - \rho_\infty\|_2 \tag{5.23}$$

pro $t > 0$.

Po otestování rovnice (5.1) funkcí ψ dostáváme identitu

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \rho\mathbf{u}\cdot\psi \, dz - \int_\Omega \Big(\rho\mathbf{u}\cdot\psi_t + \rho(\mathbf{u}\cdot\nabla)\psi\cdot\mathbf{u} \ - 2u_x\psi_x^1 - 2v_y\psi_y^2$$

$$-\rho^\beta(\rho-\rho_\infty)\mathrm{div}\,\mathbf{u}+(\rho^\gamma-\rho_\infty^\gamma)(\rho-\rho_\infty)-4D_{12}\mathbf{u}D_{12}\psi\Big)\ dz=0. \tag{5.24}$$

Přenásobením poslední rovnice konstantou $-\epsilon$ a sečtením s energetickou nerovností (5.21) dostáváme

$$\frac{d}{dt}\mathcal{V}_\epsilon(t)+\mathcal{W}_\epsilon(t)\le 0 \text{ pro } t>0, \tag{5.25}$$

kde funkcionály $\mathcal{V}_\epsilon$ a $\mathcal{W}_\epsilon$ jsou definovány takto

$$\mathcal{V}_\epsilon=\int_\Omega\left(\frac{1}{2}\rho|\mathbf{u}|^2+\Pi(\rho,\rho_\infty)-\epsilon\rho\mathbf{u}\cdot\psi\right)\ dz$$

$$\mathcal{W}_\epsilon=\int_\Omega\Big(|\nabla\mathbf{u}|^2+\rho^\beta|\mathrm{div}\,\mathbf{u}|^2$$

$$+\epsilon\rho\mathbf{u}\cdot\psi_t-\epsilon\rho(\mathbf{u}\cdot\nabla)\psi\cdot\mathbf{u}-2\epsilon(u_x\psi_x^1+v_y\psi_y^2)$$

$$-\epsilon\rho^\beta(\rho-\rho_\infty)\mathrm{div}\,\mathbf{u}+\epsilon(\rho^\gamma-\rho_\infty^\gamma)(\rho-\rho_\infty)-4\epsilon D_{12}\mathbf{u}D_{12}\psi\Big)\ dz.$$

V další části se budeme snažit ukázat, že existuje konstanta $K=K(\epsilon_0)$ taková, že

$$\mathcal{W}_{\epsilon_0}(t)\ge K(\epsilon_0)\mathcal{V}_{\epsilon_0}(t)\ge 0$$

pro všechna $t\in(0,\infty)$ a pro nějaké $\epsilon_0>0$. Nyní budeme odhadovat jeden po druhém integrály z funkcionálů $\mathcal{V}_\epsilon$ a $\mathcal{W}_\epsilon$.

I.

$$\int_\Omega\rho(t)|\mathbf{u}(t)|^2\ dz\le\|\rho(t)\|_\gamma\|\mathbf{u}(t)\|^2_{2\gamma/(\gamma-1)}\le c_1\|\nabla\mathbf{u}(t)\|_2^2$$

II.

$$\left|\epsilon\int_\Omega\rho(t)\mathbf{u}(t)\cdot\psi\ dz\right|\le\epsilon\sqrt{\int_\Omega\rho(t)|\mathbf{u}(t)|^2\ dz}\sqrt{\int_\Omega\rho(t)|\psi|^2\ dz}$$

$$\le\epsilon\sqrt{\int_\Omega\rho(t)|\mathbf{u}(t)|^2\ dz}\sqrt{\|\rho(t)\|_2}\|\psi(t)\|_4\le c_2(\epsilon^{1/2}\|\nabla\mathbf{u}(t)\|_2^2$$

$$+\epsilon^{3/2}\|\rho(t)-\rho_\infty\|_2^2)\,.$$

III. Vezměme funkci $\Pi(s,\rho_\infty)$ a zkoumejme ji podrobněji. Je jasné, že funkce $\Pi(s,\rho_\infty)$ nabývá stejné hodnoty jako funkce $(s-\rho_\infty)^2$ pro $s=\rho_\infty$. Nejdříve dokážeme, že

$$\Pi(s,\rho_\infty)\ge c_3(s-\rho_\infty)^2 \text{ pro } s\in[0,\infty).$$

Abychom dostali výše uvedený odhad stačí ověřit, že

$$\frac{d}{ds}\Pi(s,\rho_\infty) = \frac{s^{\gamma-1}-\rho_\infty^{\gamma-1}}{\gamma-1} + s^{\gamma-1}-\rho_\infty^{\gamma-1} \geq 2c(s-\rho_\infty)$$

pro $s \geq \rho_\infty$ a

$$\frac{d}{ds}\Pi(s,\rho_\infty) = \frac{s^{\gamma-1}-\rho_\infty^{\gamma-1}}{\gamma-1} + s^{\gamma-1}-\rho_\infty^{\gamma-1} \leq 2C(s-\rho_\infty)$$

pro $s \in [0,\rho_\infty]$. To ale lze snadno odvodit ze vztahu

$$(a^r - b^r) = (a-b)(a^{r-1} + a^{r-2}b + \ldots + ab^{r-2} + b^{r-1}),\ r \in \mathbb{N},$$

kde $b := \rho_\infty > 0$ a $r = \gamma - 1$. Stejným způsobem ověříme

$$\Pi(s,\rho_\infty) \leq c_4(s-\rho_\infty)^2$$

pro $s \in [0,K],\ \rho_\infty < K < +\infty$, kde $c_4 = c_4(K)$. Odtud

$$\begin{aligned} c_3\|\rho(t)-\rho_\infty\|_2^2 \leq \int_\Omega \Pi(\rho(t),\rho_\infty)\ dz &\leq c_4\|\rho(t)-\rho_\infty\|^2_{2,\Omega^K(t)} \\ &+ \int_{\Omega\setminus\Omega^K(t)} \Pi(\rho,\rho_\infty)\ dz \end{aligned} \tag{5.26}$$

pro $\Omega^K(t) = \{x \in \Omega;\ \rho(x,t) \leq K\}$.

Nyní se věnujme funkcionálu $\mathcal{W}_\epsilon(t)$.

IV.

$$\frac{\epsilon}{3}\int_\Omega (\rho^\gamma(t)-\rho_\infty^\gamma)(\rho(t)-\rho_\infty)\ dz$$

$$= \frac{\epsilon}{3}\int_\Omega (\rho(t)-\rho_\infty)^2(\rho^{\gamma-1}(t) + \ldots + \rho_\infty^{\gamma-1})\ dz \geq c_5\frac{\epsilon}{3}\|\rho(t)-\rho_\infty\|_2^2. \tag{5.27}$$

Protože

$$c_6(s^\gamma - \rho_\infty^\gamma) \geq s^\beta(s-\rho_\infty)$$

pro $s \geq K$, $\gamma > \beta + 1$ a konstantu $c_6 = c_6(K)$ pak dostáváme

$$\frac{c_6\epsilon}{3}\int_{\Omega\setminus\Omega^K(t)} (\rho^\gamma - \rho_\infty^\gamma)(\rho-\rho_\infty)\ dz \geq \frac{\epsilon}{3}\int_{\Omega\setminus\Omega^K(t)} \rho^\beta(\rho-\rho_\infty)^2\ dz. \tag{5.28}$$

Z následujícího odhadu

$$c_7(s^\gamma - \rho_\infty^\gamma)(s-\rho_\infty) \geq \frac{s(s^{\gamma-1} - \rho_\infty^{\gamma-1})}{\gamma - 1} - \rho_\infty^{\gamma-1} s + \rho_\infty^\gamma$$

pro $s \geq K$ a konstantu c_7 závisející na K vyplývá nerovnost

$$\frac{c_7\epsilon}{3}\int_{\Omega\setminus\Omega^K(t)} (\rho^\gamma - \rho_\infty^\gamma)(\rho - \rho_\infty)\ dz \geq \frac{\epsilon}{3}\int_{\Omega\setminus\Omega^K(t)} \Pi(\rho,\rho_\infty)\ dz. \tag{5.29}$$

V.

$$\begin{aligned}\left|4\epsilon\int_\Omega D_{12}\mathbf{u}(t)D_{12}\psi\ dz\right| &\leq 4\epsilon\|\nabla\mathbf{u}(t)\|_2\|\nabla\psi(t)\|_2\\ &\leq c_8\|\nabla\mathbf{u}(t)\|_2^2 + c_9\epsilon^2\|\rho(t)-\rho_\infty\|_2^2,\end{aligned}$$

kde $c_9 = c_9(c_8)$ je taková konstanta, že $c_9(c_8) \to \infty$ pro $c_8 \to 0$.

VI.

$$\left|2\epsilon\int_\Omega u_x\psi_x^1 + v_y\psi_y^2\ dz\right| \leq c_{10}\|\nabla\mathbf{u}(t)\|_2^2 + \epsilon^2 c_{11}\|\rho(t)-\rho_\infty\|_2^2,$$

kde vztah mezi konstantami c_{10} a c_{11} je stejný jako mezi c_8 a c_9.

VII.

$$\begin{aligned}\left|\epsilon\int_\Omega \rho(t)\mathbf{u}(t)\cdot\psi_t\ dz\right| &\leq \epsilon\|\rho(t)\|_\gamma\|\mathbf{u}(t)\|_{2\gamma/(\gamma-2)}\|\psi_t(t)\|_2\\ &\leq \epsilon\|\rho(t)\|_\gamma\|\mathbf{u}(t)\|_{2\gamma/(\gamma-2)}\|\rho(t)\mathbf{u}(t)\|_2\\ &\leq \epsilon\|\rho(t)\|_\gamma^2\|\mathbf{u}(t)\|_{2\gamma/(\gamma-2)}^2 \leq \epsilon c_{12}\|\nabla\mathbf{u}(t)\|_2^2.\end{aligned}$$

Výše uvedený odhad plyne ze skutečnosti, že $\operatorname{div}\psi_t = -\operatorname{div}(\rho\mathbf{u})$, a z definice funkce ψ jakožto řešení úlohy (5.22)–(5.23).

VIII.

$$\begin{aligned}\left|\epsilon\int_\Omega \rho^\beta(t)\operatorname{div}\mathbf{u}(t)(\rho(t)-\rho_\infty)\ dz\right| &\leq \left|\epsilon\int_{\Omega^K(t)} \rho^\beta(t)\operatorname{div}\mathbf{u}(t)(\rho(t)-\rho_\infty)\ dz\right|\\ &+ \left|\epsilon\int_{\Omega\setminus\Omega^K(t)} \rho^\beta(t)\operatorname{div}\mathbf{u}(t)(\rho(t)-\rho_\infty)\ dz\right|\\ &\leq c_{13}\int_{\Omega^K(t)} \rho^\beta(t)|\operatorname{div}\mathbf{u}(t)|^2\ dz + \epsilon^2 c_{14}\|\rho(t)-\rho_\infty\|_2^2\end{aligned}$$

$$
+\epsilon\sqrt{\int_{\Omega\setminus\Omega^K(t)}\rho^\beta(t)|\operatorname{div}\mathbf{u}(t)|^2\,dz\int_{\Omega\setminus\Omega^K(t)}\rho^\beta(\rho-\rho_\infty)^2\,dz}
$$

$$
\leq c_{15}\int_\Omega \rho^\beta|\operatorname{div}\mathbf{u}|^2\,dz+\epsilon^2 c_{14}\|\rho(t)-\rho_\infty\|_2^2
$$

$$
+\epsilon^2 c_{16}\int_{\Omega\setminus\Omega^K(t)}(\rho^\gamma-\rho_\infty^\gamma)(\rho-\rho_\infty)\,dz,
$$

kde jestliže c_{15} je dostatečně malá konstanta, pak $c_{16}(c_{15})$ a $c_{14}(c_{13})$ jsou velké. V poslední nerovnosti jsme využili odhad (5.28).

IX.

$$
\epsilon\int_\Omega \rho(t)|\mathbf{u}(t)|^2|\nabla\psi|\,dz\leq\epsilon\|\nabla\psi(t)\|_2\|\mathbf{u}(t)\|^2_{2\gamma/(\gamma-2)}\|\rho(t)\|_\gamma\leq c_{17}\epsilon\|\nabla\mathbf{u}(t)\|_2^2.
$$

X.

$$
\left|\epsilon\int_\Omega\rho(t)\mathbf{u}(t)\cdot\psi\,dz\right|\leq c_{18}\frac{1}{2}\int_\Omega\rho(t)|\mathbf{u}(t)|^2\,dz+c_{19}\epsilon^2\|\rho(t)-\rho_\infty\|_2^2,
$$

kde konstanta c_{18} je dostatečně malá a tedy z Youngovy nerovnosti musí být konstanta c_{19} velká. Podíváme-li se na odhady **V.** – **IX.**, pak zřejmě buď díky konstantám z Youngovy nerovnosti nebo vlivem ϵ lze všechny normy gradientu rychlosti odhadnout pomocí $\int_\Omega|\nabla\mathbf{u}|^2\,dz$ a po přenásobení vhodnou konstantou $K(\epsilon_0)$ lze totéž udělat s **I**. a **II**. U hustoty se využije toho, že odhady zahrnují ϵ^2 a tedy mohu k odhadu použít (5.27) a v případě (5.26) použijeme (5.29). Jak můžeme vidět z odhadů **I.-X.** existují konstanty $c_8, c_{10}, c_{15}, \epsilon_0$ a $K(\epsilon_0)$ dostatečně malé a takové, že $K(\epsilon_0)\mathcal{V}_{\epsilon_0}(t)\leq\mathcal{W}_{\epsilon_0}(t)$ pro všechna $t>0$. Pak platí nerovnost

$$
\frac{d}{dt}\mathcal{V}_{\epsilon_0}(t)+K(\epsilon_0)\mathcal{V}_{\epsilon_0}(t)\leq 0 \text{ pro } t>0
$$

a z odhadu **X**. plyne nerovnost (5.20). □

References

[1] Antoncev S. N., Kazhikhov A. V., Monakhov V. N., Boundary value problems of mechanics of inhomogeneous fluids, *Nauka, Novosibirsk, 1983 (Russian).*

[2] Bao N. Z., Zlotnik A. A.: *Properties and asymptotic behavior of solutions of a problem for one-dimensional motion of viscous barotropic gas*, (Russian) Mat. Zametki 55 (1994), no. 5, 51-68, 158; translation in Math. Notes 55 (1994), no. 5-6, 471-482.

[3] Beirão da Veiga H.: *Attracting properties of one dimensional flows of a general barotropic viscous fluid. Periodic flows*, Annali di Matematika Pura ed Applicata (IV), **CLXI** (1992), 153-165.

[4] Calderón A. P., Zygmund A.: *On singular integrals*, Amer. J. Math., **78** (1956), 289-309.

[5] Erban R.: *On the existence of solutions to the Navier-Stokes equations of a two-dimensional compressible flow*, to appear in Mathematical methods in the Applied Sciences.

[6] Erban R.: *On the static-limit solutions to the Navier-Stokes equations of compressible flow*, J. Math. Fluid. Mech. **3** (2001), no. 4, 393-408.

[7] Feireisl E., Novotný A., Petzeltová H.: *On the existence of globally defined weak solutions to the Navier-Stokes equations*, J. Math. Fluid. Mech. 3, No. 4, (2001) 358-393.

[8] Feireisl E., Petzeltová Hana: *Large-time behaviour of solutions to the Navier-Stokes equations of compressible flow*, Arch. Rat. Mech. Anal., **150** (1999), 77-96

[9] Galdi G., An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier-Stokes Equations I, *Springer Tracts in Natural Philosophy, Vol.* **38**, *Springer, New York*, 1994.

[10] Kazhikov A. V., Nikolaev V. B.: *On the theory of the Navier-Stokes equations of a viscous gas with nonmonotone state function*, Soviet Math. Dokl. **20** 583-585 (1979).

[11] Kazhikhov A. V., Vajgant V. A.: *On the existence of global solutions for Navier-Stokes equations in 2D domain for compressible flow*, Sibirsk. Mat. Zh. **36** (1995), no. 6, 1283-1316, (Russian), translation in Siberian Math. J. **36** (1995), no. 6, 1108-1141.

[12] Krasnoselskij M. A., Rutickij J. B., Convex Functions and Orlicz Spaces, *Noordhoff, Groningen*, 1961.

[13] Krbec M., Kokilashvili V., Weighted Inequalities in Lorentz and Orlicz Spaces, *World Scientific*, 1991.

[14] Kufner A., Weighted Sobolev Spaces, *Teubner-texte zur Mathematik, Band 31, Teubner Verlagsgesellschaft*, Leipzig, 1980.

[15] Kufner A., Fučík S., John O., Function Spaces, *Academia, Praha*, 1977.

[16] Lacroix M.-T.: *Espaces de traces de espaces de Sobolev-Orlicz*, J. de Math. Pures et Appl. **53** (1974), 439-458.

[17] Ladyženskaja, O. A.; Solonnikov, V. A.; Ural'ceva, N. N.: Linear and quasilinear equations of parabolic type. *Translated from the Russian by S. Smith. Translations of Mathematical Monographs, Vol. 23 American Mathematical Society, Providence, R.I. 1967.*

[18] Lions P.-L., Mathematical topics in fluid mechanics, Volume 1: Incompressible models, *Clarendon Press, Oxford*, 1997.

[19] Lions P.-L., Mathematical topics in fluid mechanics, Volume 2: Compressible models, *Clarendon Press, Oxford*, 1997.

[20] Mamontov A. E.: *Orlicz spaces in the existence problem of global solutions to viscous compressible nonlinear fluid equations*, preprint 2-96, In-ta Gidrodinamiki i.m. M. A. Lavrenteva.

[21] Mamontov A. E.: *Global solvability of the multidimensional Navier-Stokes equations of a compressible fluid with nonlinear viscosity I.*, Siberian Mathematical Journal, Vol. 40, No. 2, 1999, 351-362.

[22] Mamontov A. E.: *Global solvability of the multidimensional Navier-Stokes equations of a compressible fluid with nonlinear viscosity II.*, Siberian Mathematical Journal, Vol. 40, No. 3, 1999, 541-555.

[23] Matsumura A., Nishida T.: *Initial boundary value problems for the equations of motion of compressible viscous and heat conductive fluids*, Comm. Math. Phys., **89** (1983), 445-464.

[24] Novotný A., Straškraba I.: *Stabilization of weak solutions to compressible Navier-Stokes equations.*, Journal of Mathematics of Kyoto University, Vol. 40, No. 2, 2000, 217-245.

[25] Novotný A., Straškraba I.: *Convergence to equilibria for compressible Navier-Stokes equations with large data*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **179** (2001), 263-287.

[26] Salvi R., Straškraba I.: *Global existence for viscous compressible fluids and their behavior as $t \to \infty$*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA, Math., **40** (1993), 17-51.

[27] Simon J.: *Compact Sets in the Space $L^p(0,T;B)$*, Ann. Mat. Pura Appl., **IV**. Ser. 146, (1987) 65-96.

[28] Stein I., Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions, *Princeton University Press, Princenton, New Jersey*, 1970.

[29] Stein I. M., Harmonic analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality and Oscillatory Integrals, *Princeton University Press, Princeton, New Jersey*, 1993.

[30] Straškraba I.: *Asymptotic development of vacuums for 1-dimensional Navier-Stokes equations of compressible flow*, Nonlinear World, **3** (1996), 519-535.

[31] Straškraba I., Zlotnik A.: *On a decay rate for 1D-viscous compressible barotropic fluid equations*, J. Evol. Equ. **2** (2002), no. 1, 69-96.

[32] Valli A.: *Periodic and stationary solutions for compressible Navier-Stokes equations via a stability method*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Cl. Sci., **10**-4 (1983), 607-647.

[33] Valli A., Zajaczkowsky W. M.: *Navier-Stokes equations for compressible fluids: Global existence and qualitative properties of the solutions in the general case*, Commun. Math. Phys., **103** (1996), 259-296.

Autorovy publikace vztahující se k tématu disertace

[34] Vodák R.: *The problem* $\nabla \mathbf{v} = f$ *and singular integrals on Orlicz spaces*, Acta Univ. Palack. Olomuc. Fac. Rerum Natur. Math. 41 (2002), 161–173.

[35] Vodák R.: *Stabilization of Weak Solutions to the Compressible Navier-Stokes Equations for Nonlinear Viscous Fluids*, Jornal of ELECTRICAL ENGINEERING, Vol. 53, NO 12/s, 2002, 72-75.

[36] Vodák R.: *Behaviour of weak solutions of compressible Navier-Stokes equations for isothermal fluids with a nonlinear stress tensor*, in process.

6 Summary

The aim of this thesis is studied a qualitative properties of a solution to Navier-Stokes equations describing the behaviour of viscous compressible fluids and related problems. In Section 2, we introduce the basic notation used throughout this thesis. It means that we establish the notation for Young functions and appropriate Orlicz spaces. In addition, we investigate the properties of the Young functions and we study the behaviour of the functions from the Orlicz spaces. This knowledge is used in the next sections. Section 3 deals with the behaviour of the singular integrals of the Calderón-Zygmund type on Orlicz spaces. We use the method from [13], where the Riesz transformation was investigated on Orlicz spaces. These results are applied in Section 4, where we prove the existence of a solution to the problem

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = f,\ \mathbf{v}|_{\partial\Omega} = \mathbf{a}$$

for a bounded or unbounded domain. This problem was studied in [9] on Lebesgue spaces, where the solution was defined by a weakly singular integral. In addition, we study the above mentioned problem on the condition that the function f is bounded. Section 5 is devoted to the proof of the existence of a weak solution to the problem

$$\rho_t + \operatorname{div}(\rho\mathbf{u}) = 0,$$

$$(\rho\mathbf{u})_t + \operatorname{div}(\rho\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}) + \nabla\rho - \operatorname{div} P(\mathbf{u}) = \rho\mathbf{f},$$

$$\mathbf{u}(x,t) = 0,\ x\in\partial\Omega,\ t\in(0,T),\ T>0,$$

$$\rho(x,0) = \rho_0(x) \geq 0,\ x\in\Omega,$$

$$(\rho\mathbf{u})(x,0) = \mathbf{q}_0,\ x\in\Omega$$

and we study the behaviour of the solution for time going to infinity. The existence of the solution is proved by the method from [7], which provides better results than were published in [21] and [22]. In particular, we prove the existence of the weak solution on the initial condition $\rho_0 \in L_{\Phi_\beta}(\Omega)$, $\beta > 2$ ($\beta > 7/2$ in [21], [22]). Further, we modify the method from [24] to obtain a suitable function, which approximates the density for time going to infinity. Using the properties of this function, we show that the density converges strongly to the equilibrium density satisfying the rest state equations

$$\nabla\rho_\infty = \rho_\infty\mathbf{f} \quad \text{s.v. v } \Omega,$$

$$\int_\Omega \rho_\infty \; dx = \int_\Omega \rho_0 \; dx, \;\; \rho_\infty \geq 0.$$

Using the same method, we study the behaviour of the solution to the equations

$$\rho\,(u_t + uu_x + vu_y) - 2\mu u_{xx} - \mu(u_y + v_x)_y + p(\rho)_x - (\lambda(\rho)\mathrm{div}\,\mathbf{u})_x = 0,$$

$$\rho\,(v_t + uv_x + vv_y) - 2\mu v_{yy} - \mu(u_y + v_x)_x + p(\rho)_y - (\lambda(\rho)\mathrm{div}\,\mathbf{u})_y = 0,$$

$$\rho_t + \mathrm{div}\,(\rho\mathbf{u}) = 0,$$

$$u(0, y, t) = u(1, y, t) = v_x(0, y, t) = v_x(1, y, t) = 0,$$

$$v(x, 0, t) = v(x, 1, t) = u_y(x, 0, t) = u_y(x, 1, t) = 0,$$

$$\rho(x, y, 0) = \rho_0(x, y),$$

$$\mathbf{u}(x, y, 0) = \mathbf{u}_0(x, y),$$

where $(x, y) \in \Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\; 0 < x < 1,\; 0 < y < 1\}$ and $t \in (0, \infty)$. In addition, we decide upon the exponential decay rate of the solution of these equations after the modification of the method from [31] for two-dimensional case.